

# Lorenzens operative Logik und moderne beweistheoretische Semantik

Peter Schroeder-Heister

**Zusammenfassung.** Der Logik-Teil von Lorenzens *Einführung in die operative Logik und Mathematik* (1955) enthält Ansätze, die eine neue Diskussion, Einschätzung und Würdigung vom Standpunkt der modernen beweistheoretischen Semantik (seit 1971) verdienen. Es zeigt sich, daß Lorenzens Theorie einen signifikanten Schritt über die konstruktive Semantik vom BHK-Typ hinaus darstellt, der manche Ideen der beweistheoretischen Semantik vorwegnimmt. Außerdem enthält sie, aufgrund ihrer sehr allgemein gefaßten, auf beliebige Produktionssysteme ausgerichteten Konzeption Elemente, die auf dem Hintergrund der beweistheoretischen Semantik und der Anregungen aus der Theorie der Logikprogrammierung weiterentwickelt werden sollten. Anders als in Lorenzens eigener Einschätzung seiner konstruktiven Logikbegründung sollte sie also nicht nur als Zwischenstufe auf dem Weg zu einer dialogischen oder spieltheoretischen Semantik verstanden werden.

## 1. Einleitung

Paul Lorenzens *Einführung in die operative Logik und Mathematik* ist heute fast vergessen, auch im deutschsprachigen Raum. Das hat damit zu tun, daß sie in mancher Hinsicht zu früh, nämlich schon 1955 erschien<sup>1</sup>, lange bevor beweistheoretische Ansätze zu einem Zweig der philosophischen Logik wurden. Aber auch damit, daß Lorenzen selbst die operative Logik als Begründungsprogramm für die Logik zugunsten seiner sog. “dialogischen” Begründung der Logik aufgab, die dann seit Ende der 1960er Jahre zu intensiven philosophischen Diskussionen Anlaß gab und auch heute noch — sogar verstärkt — einen Ansatzpunkt zur Beschreibung, Gewinnung und Rechtfertigung logischer Regeln darstellt (Abramsky/Mavronicolas 2005, Marion 2007, Rahman/Rückert 2001). Wie glücklich die Entscheidung Lorenzens zugunsten der dialogischen Logik

---

<sup>1</sup>Was die Logikbegründung angeht, enthält der Artikel Lorenzen (1950) schon wesentliche Punkte des späteren Buches.

war, soll hier nicht erörtert werden — Reinhard Kahles Artikel in diesem Band diskutiert einige bisher ungelöste Probleme des dialogischen Ansatzes, die im übrigen nicht nur für die originale Lorenzensche Variante, sondern auch für die neueren Ansätze zu spieltheoretischen Semantiken bestehen.

Im folgenden sollen wesentliche Leistungen der operativen Logik herausgehoben und in Erinnerung gerufen werden, und zwar nicht nur, weil sie *historisch* bedeutsam sind, sondern vor allem deshalb, weil sie *systematisch* von großer Signifikanz für die moderne beweistheoretische Semantik sind und ihr eine Reihe von Anregungen geben können. Wir erläutern daher das Programm der “klassischen” beweistheoretischen Semantik, wie es insbesondere von Dag Prawitz entwickelt worden ist (Abschnitt 2), konfrontieren Lorenzens Ansatz damit (Abschnitt 3) und zeigen dann, daß auch für neuere Ansätze zur beweistheoretischen Semantik, die erheblich über Prawitz’ klassische Konzeption hinausgehen und von Ideen der Logikprogrammierung inspiriert sind, Lorenzens Werk originelle Ideen liefert (Abschnitt 4). Da die operative Logik mindestens eine Dekade älter ist als die beweistheoretische Semantik<sup>2</sup>, hätte man erwarten können, daß sie in dieser stärker berücksichtigt worden wäre. Dies war jedoch nicht der Fall — die Differenzen in Intention und Präsentation waren *prima facie* wohl doch zu unterschiedlich, insbesondere, was die Behandlung der zentralen aussagenlogischen Operation der Implikation angeht. Daß sich umgekehrt Lorenzen selbst in die Diskussion um die beweistheoretische Semantik einschalten würde, war nicht mehr zu erwarten, hatte er doch schon Mitte der 1970er Jahre die Begründungsprobleme von Logik und Mathematik hinter sich gelassen und andere Themen zu seiner zentralen Agenda gemacht.

## 2. Beweistheoretische Semantik

Das Programm der beweistheoretischen Semantik ist untrennbar mit Gerhard Gentzens Kalkül des natürlichen Schließens und seiner philosophischen Interpretation der Regeln dieses Kalküls verknüpft. Bekanntlich gliedern sich die Grundregeln für jedes logische Zeichen in Einführungs- und Beseitigungsregeln, so im Falle von Konjunktion und Disjunktion in die Einführungsregeln

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B} \wedge\text{-E} \quad \frac{[A] \quad B}{A \rightarrow B} \rightarrow\text{-E}$$

und die Beseitigungsregeln

$$\frac{A \wedge B}{A} \wedge\text{-B} \quad \frac{A \wedge B}{B} \wedge\text{-B} \quad \frac{A \rightarrow B \quad A}{B} \rightarrow\text{-B} .$$

Nach Gentzens philosophischer Interpretation dieser Regeln sind die Einführungsregeln primär und die Beseitigungsregeln sekundär:

---

<sup>2</sup>Selbst wenn man Prawitz’ Werk zum natürlichen Schließen (1965) zum Ausgangspunkt wählt. Als explizit semantische Theorie wird sie erstmals bei Prawitz (1973) formuliert.

Die Einführungen stellen sozusagen die “Definitionen” der betreffenden Zeichen dar, und die Beseitigungen sind letzten Endes nur Konsequenzen hiervon, was sich etwa so ausdrücken läßt: Bei der Beseitigung eines Zeichens darf die betreffende Formel, um deren äußerstes Zeichen es sich handelt, nur “als das benutzt werden, was sie auf Grund der Einführung dieses Zeichens bedeutet”. [...] Durch Präzisierung dieser Gedanken dürfte es möglich sein, die  $B$ [eseitigungs]-Schlüsse auf Grund gewisser Anforderungen als eindeutige Funktionen der zugehörigen  $E$ [inführungs]-Schlüsse nachzuweisen. (Gentzen 1934/35, S. 189)

Das heißt, daß Beseitigungsregeln gerechtfertigt werden auf der Basis von Einführungsregeln. Aus diesem philosophischen *dictum*, das bei Gentzen nur den Status einer motivierenden Bemerkung hat, hat Prawitz als der zentrale Theoretiker der beweistheoretischen Semantik zusammen mit Michael Dummett ein ganzes bedeutungstheoretisches Programm gemacht.<sup>3</sup> Hatte er schon 1965 in seinem Standardwerk “Natural Deduction” den Lorenzenschen Terminus “Inversionsprinzip” übernommen, um die Beziehung von Beseitigungsregeln zu Einführungsregeln zu beschreiben, so lieferte er 1971 und vor allem 1973 und 1974 eine Semantik von Beweisen, die auf der Vorstellung der Priorität von Einführungsregeln als grundlegenden Bedeutungsfestsetzungen basiert. Diese Idee wurde ungefähr zur gleichen Zeit von Dummett zur philosophischen Konzeption einer verifikationistischen “theory of meaning” ausgearbeitet, die von “assertibility conditions” als zentraler Bedeutungsfestlegung ausging, aufgrund derer alle anderen Regeln gerechtfertigt werden sollten<sup>4</sup>.

Dummett’s Ansatz ist in der Sprachphilosophie intensiv diskutiert worden. Er soll hier nicht thematisiert werden, da im Hinblick auf Lorenzen die mehr technologischen Überlegungen von Prawitz zentraler erscheinen, abgesehen davon, daß sich der beweistheoretische Ansatz nur durch präzise Ausarbeitung seiner formalen Grundlagen ein festes Standbein in der philosophischen Semantik erwerben kann. Wir haben ja in der Sprachphilosophie die paradoxe Situation vorliegen, daß einerseits in der all-

---

<sup>3</sup>Für dieses Programm ist vom Autor Ende der 1980er Jahre der Terminus “beweistheoretische Semantik” vorgeschlagen worden, weil es sich um eine Theorie handelt, die prinzipiell auf dieselben Begriffe wie die klassische modelltheoretische Semantik zielt (Bedeutung, Gültigkeit, Wahrheit, Folgerung usw.), diese jedoch mit anderen Grundansätzen und Methoden behandelt. Der Terminus “Semantik” sollte nicht dem denotationell-modelltheoretischen Ansatz vorbehalten bleiben, auch wenn in der üblichen Wahrnehmung “Semantik” gerade das Gegenteil von (formalistisch-syntaktisch mißverständener) “Beweistheorie” ist. Vgl. dazu die Einleitung zum *Synthese*-Themenheft “Proof-Theoretic Semantics” (Kahle/Schroeder-Heister 2006). Es sei allerdings zugestanden, daß die Hilbertsche Beweistheorie, indem sie Formalismus zu ihrem Programm erhob, das ihre getan hat, um sich von Semantik abzusetzen. Die “allgemeine Beweistheorie” (“general proof theory”) der durch Per Martin-Löf und Dag Prawitz geprägten schwedischen Schule der Beweistheorie hat diesem Mißverständnis abgeholfen.

<sup>4</sup>Zusammengefaßt in Dummett (1991).

gemeinphilosophischen Diskussion die Gebrauchstheorie der Bedeutung (“meaning as use”) als plausibler Ansatz zählt und sehr wohlwollend behandelt, ja bisweilen sogar als Selbstverständlichkeit genommen wird, andererseits in der formalen philosophischen Semantik, die von Alfred Tarski begründet und z.B. von Rudolf Carnap und Richard Montague weiterentwickelt worden ist, der denotationelle Ansatz im Vordergrund steht — nicht zuletzt deshalb, weil er technisch so gut ausgearbeitet ist und auf zahlreiche sprachliche Phänomene angewendet werden kann, trotz grundlegender sprachphilosophischer Einwände gegen den Denotationalismus. Einer der wenigen gegenwärtigen philosophischen Ansätze, die eine inferentielle Semantik zur Basis haben, ist derjenige Robert Brandoms<sup>5</sup>. Vielleicht erreichen beweistheoretische Ansätze im Rahmen der Diskussion dieses Ansatzes einen besseren Stand in der (breiteren) Philosophie.

Die formale beweistheoretische Semantik baut auf einer philosophischen Umdeutung syntaktischer beweistheoretischer Resultate auf. Hier stehen zwei Themen aus der Theorie des natürlichen Schließens im Vordergrund: Einmal die Normalisierungstheorie, wie sie von Prawitz (1965) in seiner wegweisenden Monographie “Natural Deduction” entwickelt worden ist, und ferner die auf William Tait (1967) zurückgehende Methode semantikartiger Prädikate, die in Weiterentwicklungen der Normalisierungstheorie, insbesondere in Beweisen der sog. “starken Normalisierung” eine zentrale Rolle spielt.

In der Normalisierungstheorie geht es darum, Beweise im natürlichen Schließen in Normalformen zu überführen, die in einem gewissen Sinne “umwegfrei” sind. Das für die philosophische Semantik zentrale technische Resultat ist dabei, daß sich geschlossene (= annahmefreie) Beweise in solche umformen lassen, die im letzten Schritt eine Einführungsregel verwenden. In der philosophischen beweistheoretischen Semantik wird dieses *Resultat* zu einem *Postulat* umgedeutet: Ein geschlossener Beweis wird nur dann als gültig angesehen, wenn er sich in einen Beweis umformen läßt, der im letzten Schritt eine Einführungsregel verwendet, gemäß der Maßgabe, daß Einführungsregeln die eigentlichen bedeutungsverleihenden Regeln sind.<sup>6</sup> Die Reduktionsprinzipien, die es erlauben, Beweise so umzuformen, daß sie eine solche Form haben, beruhen dabei auf der Tatsache, daß die Beseitigungsregeln in gewisser Weise Umkehrungen der Einführungsregeln sind und daß demgemäß die Anwendung einer Einführungsregel, gefolgt von der Anwendung einer Beseitigungsregel, einen Umweg darstellt, den man durch eine geeignete Reduktion eliminieren kann. Z.B. läßt sich im Fall der Konjunktion

---

<sup>5</sup>Vgl. z.B. Brandom (2000), wo ausdrücklich auf die Theorien von Dummett und Prawitz Bezug genommen wird.

<sup>6</sup>Bei Dummett erhält dieses Prinzip zugleich den Status einer *Fundamentalannahme* (“fundamental assumption”) (Dummett 1991, Kap. 12).

eine Folge von Schritten

$$\frac{\mathcal{D}_1 \quad \mathcal{D}_2}{\frac{A \quad B}{A \wedge B} \wedge\text{-I}} \wedge\text{-E}$$

bei der  $\frac{\mathcal{D}_1}{A}$  und  $\frac{\mathcal{D}_2}{B}$  mit  $A$  bzw.  $B$  endende Beweise sind, reduzieren auf  $\frac{\mathcal{D}_1}{A}$ , und im Fall der Implikation läßt sich die Schrittfolge

$$\frac{[A] \quad \mathcal{D}_1}{\frac{B}{A \rightarrow B} \rightarrow\text{-I}} \frac{\mathcal{D}_2}{A} \rightarrow\text{-E}$$

wobei  $\mathcal{D}_1$  einen Beweis von  $B$  aus  $A$  darstellt, dessen Annahme  $A$  bei der  $\rightarrow$ -Einführung  $B$

beseitigt wird (letzteres wird durch die eckige Klammer angedeutet), reduzieren auf

$$\frac{\mathcal{D}_2}{A} \mathcal{D}_1$$

Prawitz (1965) spricht hier, Lorenzens Terminus der operativen Logik aufgreifend, von “Inversionsprinzip” — zu Recht, wie wir in Abschnitt 3.4 sehen werden.

Taits (1967) Theorie<sup>7</sup> ist für den Gültigkeitsbegriff der beweistheoretischen Semantik zum Modell geworden. Dieser Theorie liegt die Idee zugrunde, zunächst ein Prädikat für Beweise zu definieren, das semantiktartige Züge trägt. Tait spricht von “convertibility”, spätere Termini sind “computability” (Martin-Löf 1971), “reducibilité” (Girard 1971) und “validity” (Prawitz 1971). Dieses durch eine verallgemeinerte induktive Definition definierte Prädikat impliziert trivialerweise die Normalisierbarkeit von Beweisen, so daß im wesentlichen die Aufgabe verbleibt zu überprüfen, daß alle Beweise im natürlichen Schließen dieses Prädikat erfüllen. Es ist erstmals von Prawitz (1971) zum Beweis der *starken* Normalisierung eingesetzt worden, d.h. zum Beweis der Tatsache, daß *jede* Normalisierungsfolge terminiert, unabhängig von der Auswahl der jeweils anzuwendenden Reduktionsschritte. Es stellt heute das Standardverfahren für den Nachweis der starken Normalisierbarkeit für logische Kalküle und damit verwandte Termreduktionssysteme dar<sup>8</sup>.

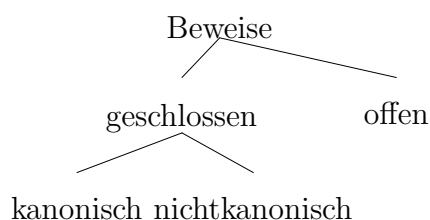
Allerdings unterscheidet sich der Gültigkeitsbegriff der beweistheoretischen Semantik, wie ihn Prawitz definiert, in einer Hinsicht grundlegend von diesem “semantiktartigen” Begriff. Er stellt nämlich *geschlossene* Beweise in den Vordergrund und zielt

<sup>7</sup>Ursprünglich von Tait für den zur konstruktiven Aussagenlogik gleichwertigen getypten Lambda-Kalkül entwickelt und untersucht.

<sup>8</sup>In neuester Zeit ist von Ernst Zimmermann (2008) ein direktes Verfahren, das nicht auf Gültigkeitsbegriffen aufbaut, vorgeschlagen worden.

damit nicht direkt auf die Normalisierung beliebiger offener Beweise. Daß ein Beweis in Normalform ist, ist noch kein Grund dafür, ihn als gültig im philosophischen Sinne anzusehen. Insofern tut sich Prawitz keinen Gefallen damit, daß er für seinen philosophisch-semantischen Gültigkeitsbegriff denselben Terminus (“valid”) verwendet wie für den technischen Begriff im Rahmen von Normalisierungsbeweisen.<sup>9</sup>

Der Gültigkeitsbegriff der beweistheoretischen Semantik geht von geschlossenen (= annahmefreien) Beweisen als Grundidee aus. Annahmen in offenen Beweisen werden als Platzhalter für geschlossene Beweise verstanden. Dieser Ansatz ist anfechtbar (vgl. z.B. Schroeder-Heister/Contu 2005), soll aber hier nicht weiter diskutiert werden, da er auch bei Lorenzen eine Grundvoraussetzung darstellt. Die zweite Grundidee ist, daß Beweise, die eine Einführungsregel im letzten Schritt verwenden, “kanonisch” sind, weil sie die Bedeutung der verwendeten logischen Zeichen festlegen. Als dritte Grundidee wird angenommen, daß Beweisreduktionsverfahren (entsprechend den oben skizzierten Verfahren für Konjunktion und Implikation) vorliegen, die geschlossene nichtkanonische Beweis in geschlossene kanonische Beweise überführen. Die Gültigkeit von Beweisen wird dann gemäß der folgenden Klassifikation von Beweisen



zunächst für kanonische geschlossene Beweise definiert, dann für nichtkanonische geschlossene Beweise und dann für offene Beweise, wobei die Definitionen nicht unabhängig sind, sondern wechselseitig aufeinander zurückgreifen, da z.B. ein kanonischer geschlossener Beweis einer Implikationsaussage in seiner Prämissenmenge einen offenen Beweis benutzen kann (und in der Regel auch benutzt). Die atomare Basis dieser Definition stellen Produktionssysteme  $S$  dar, d.h. Kalküle, die atomare Aussagen zu generieren gestatten. Im Zusammenhang unseres Vergleichs mit Lorenzen, der Kalküle im streng formalen Sinne zum Ausgangspunkt wählt, müssen wir hier nicht diskutieren, ob und inwieweit dieser Ansatz angemessen ist, den Umgang mit atomaren Aussagen zu regeln — in diesem Punkt gibt es keine Differenzen.<sup>10</sup>

---

<sup>9</sup>Daß beide Begriffe wirklich im technischen Sinne verschieden sind, kann formal gezeigt werden (Schroeder-Heister 2006a, S. 562–564).

<sup>10</sup>Letztlich besteht natürlich das Problem, wie man (z.B. bei nichtmathematischen Aussagen) zu solchen atomaren Systemen kommt. Dieses Problem ist analog zu dem der Bewertungs- oder Substitutionssemantik: Wie kommt man zu Wahrheitsbewertungen atomarer Aussagen, wenn man einen denotationalen Ansatz in bezug auf deren Komponenten ablehnt. Einen neuartigen Ansatz, der versucht,

Die beweistheoretische Gültigkeitsdefinition lautet dann wie folgt (Prawitz 1973, 1974, 2006, Schroeder-Heister 2006a):

- (I) *Jede geschlossene Ableitung in  $S$  ist  $S$ -gültig.*
- (II) *Eine geschlossene kanonische Ableitung ist  $S$ -gültig, falls ihre unmittelbare Teila-  
bleitung  $S$ -gültig ist.*
- (III) *Eine geschlossene nichtkanonische Ableitung ist  $S$ -gültig, wenn sie auf eine  $S$ -  
gültige kanonische Ableitung reduzierbar ist.*

- (IV) *Eine offene Ableitung  $\frac{A_1 \dots A_n}{\mathcal{D} \quad B}$ , wobei alle offenen Annahmen von  $\mathcal{D}$  zu  $A_1, \dots, A_n$  gehören, ist  $S$ -gültig, falls für jede Erweiterung  $S'$  von  $S$  und für jede Liste von geschlossenen  $S'$ -gültigen Ableitungen  $\frac{\mathcal{D}_i}{A_i}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) die Ableitung*

$$\frac{\mathcal{D}_1 \quad \mathcal{D}_n}{\frac{A_1 \dots A_n}{\mathcal{D} \quad B}} \quad S'\text{-gültig ist}^{11}.$$

Der Gegenstand dieser Gültigkeitsdefinition sind offenbar *Beweise als ganze*, nicht etwa *Beweisschritte*. Insofern handelt es sich hier um einen *globalen* Ansatz. Ein einzelner Beweisschritt oder eine Regel

$$\frac{A_1 \quad \dots \quad A_n}{A}$$

wird dadurch gerechtfertigt, daß sich gültige geschlossene Beweise  $\frac{\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_n}{A_1, \dots, A_n}$  der Prämissen zu einem gültigen geschlossenen Beweis

$$\frac{\mathcal{D}_1 \quad \dots \quad \mathcal{D}_n}{\frac{A_1 \quad \dots \quad A_n}{A}}$$

der Konklusion fortsetzen lassen. Beweise sind also nicht deshalb gültig, weil sie aus gültigen Beweisschritten bestehen oder gültige Beweisregeln verwenden, sondern umgekehrt sind Regeln gültig, weil sie gültige Beweise in einen gültigen Beweis transformieren. Der Begriff der logischen Konsequenz, der sich auf diese Weise ergibt, ist

---

im Rahmen einer Substitutionssemantik die interne Struktur atomarer Aussagen zu berücksichtigen, liefert Bartosz Więckowski (2006).

<sup>11</sup>Die Betrachtung von beliebigen Erweiterungen  $S'$  von  $S$  hat die Funktion, die Gültigkeitsdefinition monoton bezüglich atomarer Basissysteme zu halten. Dies wird erörtert in Schroeder-Heister 2006a.

strukturell ganz analog zum modelltheoretischen Folgerungsbegriff aufgebaut. Eine beweistheoretisch gültige Folgerung liegt dann vor, wenn sie von gültigen Beweisen der Prämissen zu einem gültigen Beweis der Konklusion führt. An die Stelle von Modellen treten gültige Beweise.<sup>12</sup>

Ein solcher Ansatz ist natürlich nur dann sinnvoll, wenn als Kandidaten, für die das Gültigkeitsprädikat definiert ist, nicht nur die üblichen Ableitungen in der (intuitionistischen) Logik gewählt werden, deren Gültigkeit man nachweisen will — sonst gäbe es nichts, das nicht gültig ist. Dazu wird der Beweisbegriff auf beliebige Beweisstrukturen ausgedehnt und der Gültigkeitsbegriff auf Systeme von Rechtfertigungen  $\mathcal{J}$  relativiert. Eine *Beweisstruktur* ist dabei eine baumförmige Anordnung von Formeln, für die Abhängigkeitsbeziehungen von Annahmen definiert sind — lax gesprochen ein Beweis, der mithilfe *beliebiger* Regeln und nicht nur der konventionellen Regeln des natürlichen Schließens generiert wird. Eine *Rechtfertigung* ist eine Transformation, die Beweisstrukturen umformt, indem sie Teilstrukturen entnimmt und neu kombiniert, ganz entsprechend den oben angegebenen Standardreduktionen für Konjunktion und Implikation. Gültigkeit wird jetzt definiert relativ zu Mengen von Rechtfertigungen  $\mathcal{J}$ . Bei der Klausel (iii) in der Definition der Gültigkeit wird dann effektiv Bezug genommen auf die Rechtfertigungsmenge  $\mathcal{J}$ : Eine geschlossene nichtkanonische Ableitung  $\mathcal{D}$  ist  $S$ -gültig in bezug auf  $\mathcal{J}$ , wenn  $\mathcal{D}$  sich *unter Anwendung der Reduktionen in  $\mathcal{J}$*  auf eine kanonische Ableitung reduzieren läßt.

Jetzt kann man z.B. sinnvoll fragen: Für welche Beweise  $\mathcal{D}$  gibt es ein System von Rechtfertigungen  $\mathcal{J}$ , so daß  $\mathcal{D}$   $S$ -gültig ist relativ zu  $\mathcal{J}$  für jedes atomare Basissystem  $S$ . Oder auch: Zu welchen Regeln

$$\frac{A_1 \dots A_n}{A}$$

gibt es ein System von Rechtfertigungen  $\mathcal{J}$ , so daß für jedes atomare Basissystem  $S$  die Regel relativ zu  $\mathcal{J}$   $S$ -gültig ist, d.h., für alle relativ zu  $\mathcal{J}$   $S$ -gültigen Beweise  $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_n$

der Beweis

$$\frac{\mathcal{D}_1 \dots \mathcal{D}_n}{\frac{A_1 \dots A_n}{A}}$$

relativ zu  $\mathcal{J}$   $S$ -gültig ist. Eine solche Regel entspricht dann einer logischen Folgerung

$$A_1, \dots, A_n \vDash A.$$

Damit kann man auch die Frage nach der semantischen Vollständigkeit stellen: Sind alle logischen Folgerungen (d.h. alle Regeln, die sich in bezug auf ein geeignetes System von Rechtfertigungen  $\mathcal{J}$  für beliebige atomare Systeme  $S$  als  $S$ -gültig erweisen) in der

---

<sup>12</sup>Die Schwächen eines konstruktiven Ansatzes, der die Grundstruktur des klassischen Folgerungsbegriffs übernimmt, werden diskutiert in Schroeder-Heister/Contu 2005.



intuitionistischen Logik ableitbar? Dieses Vollständigkeitsproblem wurde von Prawitz als naheliegende “Vermutung” aufgestellt, konnte aber bis jetzt nicht bewiesen werden — es nicht einmal klar, wie ein Vollständigkeitsbeweis zu führen wäre (Prawitz 1973). Daß umgekehrt die intuitionistische Logik korrekt ist bezüglich des Prawitzschen Gültigkeitsbegriffs, ist klar, da die Standardreduktionen für logische Zeichen, die man in Normalisierungsbeweisen verwendet, dies sicherstellen.<sup>13</sup>

Damit ist der Rahmen abgesteckt, auf dessen Hintergrund Lorenzens Leistung in seiner operativen Logik gewürdigt werden soll.

### 3. Lorenzens Logikkonzeption in der operativen Logik

Im folgenden werden anhand einiger zentraler Gesichtspunkte Lorenzens Ansatz und beweistheoretische Semantik gegenübergestellt.

#### 3.1. Kalküle und atomare Basis

Die operative Logik wird zu Recht als formalistische Konzeption angesehen. Basis ist das regelgeleitete Operieren mit Figuren (Zeichen) in sinnfreien Kalkülen, von der dieser Ansatz seinen Namen hat (Lorenzen 1955, § 1). Jedenfalls hat Lorenzen nichts getan, um dieser formalistischen Interpretation entgegenzuwirken. Im Gegenteil: Der formalistische Charakter wird von Lorenzen explizit herausgestellt, der Bezug auf umgangssprachliche Praxis bzw. entsprechendes Wissen ausdrücklich vermieden. Ihn in Parallele zu setzen zu Haskell B. Currys (1958) formalistischer Philosophie (oder auch zu Raymond Smullyan’s (1961) oder Emil Posts (1921, 1943) Theorie formaler Systeme) ist damit keineswegs abwegig. Lorenzens spätere Wendung zu dialogischen Regeln liegt teilweise darin begründet, daß ihm der operative Ansatz als zu formalistisch und der dialogische Ansatz mehr an der tatsächlichen Argumentationspraxis und damit der Lebenswelt orientiert erschien.

Das ist jedoch ein Selbstmißverständnis, nicht unverwandt dem syntaktischen Selbstmißverständnis der Hilbertschen Beweistheorie. Auch wenn Kalküle als solche sinnfrei sind, kann man sie doch als *Repräsentanten* sinnvollen Argumentierens verstehen. Wenn Reduktionsregeln für die natürlichen Zahlen oder Einführungsregeln für Konjunktion und Disjunktion angegeben werden, so sind das Regeln, die einen inhaltlichen Bezug haben, insofern sie als Regeln intendiert sind, die die Bedeutung der entsprechenden Zeichen festlegen. Jedenfalls unterscheidet sich Lorenzen hier nicht

---

<sup>13</sup>Ebenfalls lassen sich aus der Modelltheorie entlehnte Fragestellungen formulieren z.B.: Wann sind zwei beweistheoretische “Strukturen”  $\langle \mathcal{D}_1, \mathcal{J}_1 \rangle$  und  $\langle \mathcal{D}_2, \mathcal{J}_2 \rangle$  elementar äquivalent, d.h. durch erststufige Aussagen ununterscheidbar (relativ zu allen atomaren Systemen)? Kann man eine Art von *Isomorphismus* zwischen solchen beweistheoretischen Strukturen definieren? Die Untersuchung solcher Fragen steht jedoch noch in den Anfängen.

signifikant von der beweistheoretischen Semantik, die Beweise etwa im Kalkül des natürlichen Schließens als Repräsentanten inhaltlicher Argumentation versteht, auch wenn diese Beweise zunächst einmal bloß syntaktisch spezifiziert sind. Die Idee einer beweistheoretischen Semantik besteht darin, das, was wir über rein syntaktisch spezifiziertes Operieren wissen, semantisch zu verstehen, und das ist ebenso bei Lorenzen möglich. Man muß dazu allerdings seine Perspektive etwas verschieben: Es geht in der beweistheoretischen Semantik nicht darum, formale Beweise zur Grundlage inhaltlichen Verständnisses zu machen, sondern umgekehrt darum, formale Beweise inhaltlich zu deuten. Dieser Standpunkt ist bei Lorenzen nicht sehr stark ausgeprägt. Die *Operative Logik* läßt sich aber in diesem Sinne lesen, und die vorgeschlagenen Methoden — etwa die Deutung der Implikation über Zulässigkeitsbehauptungen und die Interpretation von Konjunktion, Disjunktion und Existenzquantifikation über zulässige Regeln in relativ zulässigen Kalkülerweiterungen — sind inhaltlich interpretierbar, teilweise gegen Lorenzens eigenes Verständnis der Dinge. Wenn man die Termini “Bedeutung” und “Semantik” von vornherein denotationalistisch versteht und das “Inhaltliche” in Opposition zum regelgeleiteten “Operieren” setzt, dann sind natürlich alle Gebrauchstheorien formalistisch. Wenn man also überhaupt Gebrauchstheorien der Bedeutung sinnvoll und auch auf formal zufriedenstellendem Niveau entwickeln will, dann kommt man nicht umhin, diesen Gebrauch in syntaktisch spezifizierten “Beweisen” oder “Operationen” zu kodieren. Und dies hinwiederum legt es nahe, Ergebnisse der zunächst nur syntaktisch ausgerichteten Beweistheorie in einer beweistheoretischen Semantik inhaltlich zu verstehen.

So gesehen ist Lorenzens Theorie ein Beitrag zur beweistheoretischen Semantik, auch wenn sie sich zunächst formalistisch liest. Es gibt allerdings eine berechtigte Weise, Theorien des regelgeleiteten Operierens als formalistisch und nicht semantikauglich zu interpretieren: Wenn solche Theorien nämlich einfach bestimmte Formalismen vorgeben und diese dann als (implizite) Festlegung der Bedeutung der in ihnen verwendeten Zeichen verstanden wissen wollen. Eine solche Theorie ist die operative Logik jedoch gerade nicht. Es wird nicht einfach ohne weitere Kriterien ein Logikformalismus als Basis der Logik aufgestellt. Vielmehr wird ein differenziertes Repertoire an metasprachlichen Methoden zur Rechtfertigung von Logikregeln präsentiert. Genau das ist es aber, was man unter einer beweistheoretisch orientierten Semantik verstehen sollte. Ein Logikkalkül ist ein Formalismus, der nicht nur widerspruchsfrei ist, sondern dessen Regeln darüber hinaus aufgrund geeigneter Kriterien als gültig oder gerechtfertigt oder zumindest plausibel angesehen werden. Die operative Logik ist im wesentlichen eine Theorie solcher Kriterien bzw. eine Theorie der Gewinnung logischer Kalküle aus solchen Kriterien und damit eine Theorie, die logischen Kalkülen eine semantische Deutung gibt.<sup>14</sup>

---

<sup>14</sup>Deshalb ist es auch unverständlich, daß sich Prawitz gelegentlich diese Formalismus-Kritik an

Hinzu kommt der Aspekt der atomaren Basis. In der beweistheoretischen Semantik bei Prawitz haben atomare Basiskalküle  $S$  die Funktion, die gültigen atomaren Aussagen zu generieren, und übernehmen dabei (neben Systemen von Rechtfertigungen) die Rolle, die Strukturen oder Modelle in der modelltheoretischen Semantik haben. Diese Systeme können natürlich im Grenzfall so verstanden werden, daß sie nur aus Axiomen bestehen und damit Bewertungen atomarer Aussagen sind. Aber man läßt in der beweistheoretischen Semantik ausdrücklich allgemeine Systeme zu und gibt damit Raum z.B. für Abhängigkeiten zwischen atomaren Prädikaten (“Bedeutungspostulate”). Auch dies ist nicht bloß formalistisch zu verstehen, sondern liefert auf der atomaren Ebene bisher noch nicht ausgearbeitete Ausdrucksmöglichkeiten, die das interpretationssemantisch oder bewertungssemantisch orientierte klassische Repertoire signifikant erweitern. Darin, daß er Kalküle als Ausgangspunkt für die atomare Basis wählt, unterscheidet sich Lorenzens Ansatz also nicht von der beweistheoretischen Semantik.

Hier geht der Lorenzensche Ansatz sogar noch wesentlich weiter, indem er sich nicht auf die Term-/Formelstruktur von atomaren Aussagen beschränkt, sondern vielmehr beliebig geformte Wörter über beliebigen Alphabeten als Bestandteilen zuläßt. Das ermöglicht es, seinen Ansatz nicht nur zur Beschreibung der Gültigkeit atomarer Aussagen zu verwenden, sondern auch für die schematische Behandlung von Konstruktionen und Berechnungen, die nicht an die Term-/Formel-Struktur gebunden sind. Auch findet sich bei Lorenzen keine Unterscheidung zwischen atomarer Basis und darauf aufgebautem Logikkalkül. Damit kann man “logische” Regeln als Spezialfall von “atomaren” Regeln auffassen bzw. umgekehrt “atomare” Regeln semantisch in Analogie zu “logischen” Regeln verstehen und geeignete Semantiken für beliebige induktiv definierte Ausdrücke entwickeln. In dieser Hinsicht ist die operative Logik sehr viel allgemeiner als die auf die Interpretation der logischen Zeichen konzentrierte beweistheoretische Semantik (siehe Abschnitt 4). In jedem Fall kann als Fazit festgehalten werden: Die Orientierung an Kalkülen und am schematischen Operieren mit Zeichen kann nicht als Manko der operativen Logik angesehen werden, soll ein semantisches Verständnis von Beweisen überhaupt möglich sein, wie es die beweistheoretische Semantik proklamiert. Lorenzen hätte in die Diskussion um die beweistheoretische Semantik gerade die besondere Allgemeinheit seines eigenen Ansatzes und der von ihm verwendeten atomaren Systeme einbringen können.

### **3.2. Der Primat geschlossener Beweise und die Deutung der Implikation**

*Prima facie* könnte man meinen, daß Prawitz’ beweistheoretische Semantik und Lorenzens operative Logik schon daher grundsätzlich verschieden sind, weil sie auf verschie-

---

Lorenzen zu eigen macht (zusammen mit einer Kritik an der Konzeption des Autors) (Prawitz 1985).

denen Kalkülkonzeptionen aufbauen: Lorenzen auf Produktionssystemen mit Axiomen (“Anfängen”) und Regeln, entsprechend Hilberttypkalkülen in der Logik, Prawitz dagegen auf Gentzens *Kalkül des natürlichen Schließens*, der bekanntlich als Annahmenkalkül die Einführung und Beseitigung von Annahmen erlaubt. Die Einführungsregel der Implikation

$$\frac{[A] \quad B}{A \rightarrow B}$$

läßt sich in der Lorenzenschen Kalkülkonzeption gar nicht formulieren. Lorenzen hat das natürliche Schließen als eigenständiges Konzept nicht angemessen zur Kenntnis genommen. Bei näherer Betrachtung erweist sich dies jedoch nur als Unterschied, der für die resultierenden Logikkalküle wesentlich ist, nicht jedoch für die beweistheoretische Semantik als solche. Dort ist es ja so, daß die semantisch primären Beweise die geschlossenen (annahmenfreien) Beweise sind, und die offenen Beweise sich dadurch rechtfertigen lassen, daß man ihre Annahmen als Leerstellen, nämlich als *Platzhalter für geschlossene Beweise* versteht. Gemäß der obigen  $\rightarrow$ -Einführungsregel ist die Implikation  $A \rightarrow B$  z.B. dadurch gerechtfertigt, daß die Prämisse der Einführung gerechtfertigt ist, was wiederum heißt, daß sie erlaubt, aus einem gültigen geschlossenen Beweis für  $A$  einen solchen für  $B$  zu erzeugen. Das entspricht aber genau Lorenzens Deutung der Implikation als Zulässigkeitsbehauptung:  $A \rightarrow B$  wird von Lorenzen semantisch verstanden als Zulässigkeit der Regel  $\frac{A}{B}$ : Aus einem *geschlossenen* Beweis für  $A$  läßt sich ein *geschlossener* Beweis für  $B$  gewinnen (Lorenzen 1955, § 2–3).

Insofern findet sich schon bei Lorenzen nicht nur der Primat geschlossener Beweise wie in der beweistheoretischen Semantik, sondern auch die Deutung offener Beweise und der Implikation über *Verfahren*, gültige geschlossene Beweise in gültige geschlossene Beweise zu transformieren. Der wesentliche Unterschied, der in die beweistheoretische Semantik aufgrund der Verwendung des Kalküls des natürlichen Schließens eingeht, liegt darin, daß in die Rechtfertigung von  $A \rightarrow B$  über die Einführungsregel für  $A \rightarrow B$  ein *eigener Schritt* eingeschoben wird: Kann man

$$\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ B \end{array}$$

rechtfertigen, indem man zeigt, daß sich aus einem gültigen geschlossenen Beweis von  $A$  ein solcher von  $B$  ergibt, dann kann man zu  $A \rightarrow B$  *übergehen*. Bei Lorenzen hingegen ist mit der Rechtfertigung des Übergangs von  $A$  zu  $B$  (gemäß der Regel  $\frac{A}{B}$ ) die

Rechtfertigung von  $A \rightarrow B$  *unmittelbar* geleistet. Lorenzen unterscheidet nicht zwischen *Regel* zum *Übergang* von  $A$  zu  $B$  und der Implikation  $A \rightarrow B$ . In diesem Sinne gibt es bei Lorenzen keine eigenständige Implikation, sondern nur einen Kalkül von iterierten Implikationen (= iterierten Regeln). Daher ist  $\rightarrow$  bei Lorenzen zugleich Regel- und

Implikationspfeil. Es ist ein Fortschritt der beweistheoretischen Semantik und der Verwendung des Kalküls des natürlichen Schließens, daß man beide Dinge unterscheidet: Den Übergang bzw. die Regel

$$\frac{A}{B}$$

und die dadurch gerechtfertigte Implikation  $A \rightarrow B$ . Das ändert aber nichts daran, daß die grundsätzliche semantische Konzeption, die Lorenzen mit dem Terminus “zulässig” und Prawitz mit dem Terminus “gültig” bezeichnet, dieselbe ist.

Eine genaue Interpretation von Lorenzens Theorie iterierter Metakalküle in § 6 der *Operativen Logik* zeigt im übrigen, daß der genannte Unterschied zwischen Regeln und Implikationen in gewisser Hinsicht doch schon bei Lorenzen vorhanden ist. Ist nämlich eine Regel  $A \rightarrow B$  im Kalkül  $K$  zulässig, so darf diese Regel als Satz im Metakalkül  $MK$  behauptet werden. Allgemeiner: Ist eine Regel  $(n+1)$ -ter Stufe  $R_1 \rightarrow R_2$  (worin also  $R_1$  und  $R_2$  Regeln  $n$ -ter Stufe sind) im  $n$ -ten Metakalkül  $M^n K$  zulässig, so kann sie im  $(n+1)$ -ten Metakalkül  $M^{n+1} K$ , der ein (unmittelbarer) Metakalkül zu  $M^n K$  ist, als Satz behauptet werden. Dem Unterschied zwischen Regeln und Implikationen entspricht also bei Lorenzen der Aufstieg von einer Zulässigkeitsaussage für eine Regel zur Behauptung dieser Regel als Satz im nächsthöheren Metakalkül. Es handelt sich hier nicht um eine explizite Einführungsregel für die Implikation, da die “eingeführte” Implikation zu einem anderen Kalkül (nämlich dem Metakalkül des betrachteten Kalküls) gehört, der Effekt ist aber grundsätzlich derselbe. Anstatt die Behauptung des aufgrund der Zulässigkeit der Regel  $R_1 \rightarrow R_2$  gerechtfertigten Satzes  $R_1 \rightarrow R_2$  in einen höherstufigen Kalkül zu verlagern, würde eine explizite Einführungsregel den gerechtfertigten Satz unter Verwendung eines anderen Verknüpfungszeichens (etwa “ $\supset$ ”) im selben Kalkül behaupten.

Der Vorteil von expliziten Einführungsregeln für die Implikation etwa von der Form

$$A \rightarrow B \dot{\rightarrow} A \supset B$$

würde darin liegen, daß man eine Parallelisierung der Implikation mit Konjunktion, Disjunktion und Existenzquantifikation erhielte, deren Einführungsregeln zu einem beliebigen Basiskalkül als relativ zulässige (= konservative) Regeln hinzugefügt würden.<sup>15</sup> Dann wäre nach Lorenzens Semantik für Regeln höherer Stufen die Formel  $A \supset B$  genau dann ableitbar, wenn die Regel  $A \rightarrow B$  zulässig wäre, was der intendierten Bedeutung von  $\supset$  entspräche.

---

<sup>15</sup>Lorenzen läßt bei Regeln höherer Stufe rechts und links eines Regelpfeils nur Argumente gleicher Stufe zu. Daher müßte man, wenn man diese (nicht unbedingt notwendige) Restriktion aufrechterhalten will, bei ungleichstufigen Argumenten noch die implizite Höherstufung von Regeln niedrigerer Stufe vereinbaren. Das ist technisch kein Problem. Es läßt sich durch die Hinzufügung geeignet vieler Regelpfeile vor der Regel bewerkstelligen.

Man mag darüber spekulieren, warum Lorenzen eine solche Interpretation nicht vorgeschlagen hat, sondern für die Deutung der Implikation den etwas umständlichen Mechanismus der Iteration von Metakalkülen vorzieht. Ein Grund dafür mag darin liegen, daß er “uneigentliche” Kalküle bei relativ zulässigen Erweiterungen des Ausgangskalküls vermeiden wollte. Die Rückführung der Behauptung von  $A \supset B$  auf den Nachweis der Zulässigkeit der Regel  $A \rightarrow B$  würde ja über den durch Ableitung nach bestimmten Regeln spezifizierten Beweisbegriff hinausgehen, auch wenn Zulässigkeitsaussagen nach Lorenzen “definit” sind (Lorenzen 1955, S. 5f.). Es mag also sein, daß Lorenzen solche uneigentlichen Beweise, die man als *semantische Beweise* ansehen könnte, erst auf der Stufe von Metakalkülen vorsehen wollte. Ein anderer Grund mag sein, daß er eine Doppelung von Konzepten vermeiden wollte. Diese Doppelung würde ja auf eine Unterscheidung zwischen einer reinen Regellogik, die man auch “strukturelle Logik” nennen könnte, und einer durch relativ zulässige Regeln erweiterten Implikationslogik hinauslaufen. Lorenzen hat in der Ablehnung einer solchen Unterscheidung als prominenten Vorläufer Gottlob Frege, der in seinen implikativen Strukturen, die man als Sequenzen deuten kann (Kutschera 1996, Schroeder-Heister 1997, 1999), die Trennung zwischen “Vorderglied” und “Hinterglied” als eine Sache der Auffassung ansieht, also zwischen (in heutiger Notation)  $A \vdash B \rightarrow C$  und  $A, B \vdash C$  nicht unterscheidet. Entsprechend geht Paul Hertz vor, der eine strukturelle Logik vorschlägt, die mit einer einzigen Verknüpfung auskommt und ebenfalls auf eine Unterscheidung zwischen  $\rightarrow$  und  $\vdash$  verzichtet (vgl. Schroeder-Heister 2002).<sup>16</sup> Andererseits hat Lorenzen keinerlei Bedenken, zwischen dem strukturellen Komma etwa in Regelprämissen und der Konjunktion als logischer Partikel zu unterscheiden. Daher wäre es wesentlich klarer, generell zwischen strukturellen Verknüpfungen wie dem Komma oder dem Regelpfeil<sup>17</sup> einerseits und logischen Junktoren andererseits zu unterscheiden und Einführungsregeln für Junktoren zu verwenden, die solche strukturellen Verknüpfungen in logische Verknüpfungen transformieren. Das gilt analog auch für die Allquantifikation. Man erhielte so ein einheitliches Verständnis *aller* logischen Zeichen im Sinne von logischen Partikeln als “Interpunktionen” (Došen 1989) und keine prinzipielle Unterscheidung zwischen den durch Einführungsregeln charakterisierten Junktoren einerseits und Implikation bzw. Allquantifikation andererseits. Einen grundsätzlichen Gegensatz zur beweistheoretischen Semantik kann man daraus aber nicht gewinnen: Die inhaltliche Deutung der Implikation sowie diejenige offener und geschlossener Beweise beruhen

---

<sup>16</sup>In den auf Kurt Schütte (1960) zurückgehenden Systemen werden ebenfalls die Antezedentien und Sukzedentien von Sequenzen nicht syntaktisch explizit gemacht, sondern sind als Positiv- und Negativteile eine Sache der metasprachlichen Interpretation von Formeln.

<sup>17</sup>Diese Verknüpfungen müssen nicht durch explizite Aussagenoperatoren ausgedrückt werden. Auch der Regelübergang oder die Ableitung aus Annahmen würden in diesem Sinne als strukturelle “Verknüpfungen” gelten.

auf derselben Grundidee (Schroeder-Heister 2008a,b).

### 3.3. Die semantische Signifikanz der Einführungsregeln

Gentzens Bemerkungen folgend sieht die beweistheoretische Semantik die Einführungsregeln als die zentralen bedeutungsverleihenden Regeln an. Auch hiermit steht die *Operative Logik* im Einklang. Konjunktion, Disjunktion und Existenzquantifikation werden über Einführungsregeln charakterisiert (Lorenzen 1955, § 7). Diese Einführungsregeln haben nach Lorenzen die Eigenschaft, daß sie relativ zulässig sind, d.h. die Hinzufügung von Regeln wie

$$\left\{ \begin{array}{l} A, B \rightarrow A \wedge B \\ A \rightarrow A \vee B \\ B \rightarrow A \vee B \\ A(t) \rightarrow \forall x A(x) \end{array} \right.$$

machen keine Aussagen ableitbar, die die neu eingeführten Zeichen nicht enthalten. In etwas gebräuchlicherer Terminologie würde man sagen, daß diese Erweiterungen bezüglich des Ausgangskalküls *konservativ* sind. Außer der relativen Zulässigkeit finden sich bei Lorenzen keine weiteren semantischen Überlegungen zur Auszeichnung dieser Regeln. Im Prinzip könnte man also auch andere Regeln, bei denen das neu eingeführte Zeichen nicht im Kopf auftritt, als Grundregeln zu verwenden, womit sich eine Art impliziter Definition ergäbe. Der Grund für die Bevorzugung der Einführungsregel ist jedoch klar: Diese macht die Anwendung des Inversionsprinzips und damit den Nachweis der Zulässigkeit von korrespondierenden Beseitigungsregeln möglich (siehe dazu den folgenden Abschnitt 3.4). In diesem Sinne entspricht die Lorenzensche Konzeption genau derjenigen der Gentzen-Prawitzschen beweistheoretischen Semantik, jedenfalls was Konjunktion, Disjunktion und Existenzquantifikation angeht. Dies gilt auch für die Implikation, wenn man den Lorenzenschen Kalkül wie vorhin erwähnt so erweitert, daß man einen expliziten Einführungsschritt für einen eigenständigen Implikationsjunktor

$$A \rightarrow B \dot{\rightarrow} A \supset B$$

betrachtet. Aus dem Inversionsprinzip würde sich der *modus ponens* als zugehörige Beseitigungsregel in natürlicher Weise ergeben. Auch für den Allquantor, der sich ähnlich wie die Implikation verhält, könnte man eine entsprechende Erweiterung konstruieren.

Allerdings geht der Lorenzensche Ansatz insofern über die übliche beweistheoretische Semantik hinaus, als er sich von vornherein nicht nur auf relativ zulässige Einführungsregeln für logische Zeichen anwenden läßt, sondern eine universale Theorie darstellt, bei der *jede beliebige* Regel wie eine Einführungsregel funktioniert. Bei Lorenzen selbst sind ja schon logische Konstanten wie  $\wedge$  und  $\vee$  keine Junktoren, die komplexe Aussagen aus atomaren Aussagen generieren, sondern Grundzeichen, die sich mit beliebigen Zeichen des Grundalphabets kombinieren lassen. Aussagen, die mit  $\wedge$

und  $\vee$  zusammengesetzt sind, haben denselben Status wie alle anderen Zeichenketten — sie enthalten eben nur ein zusätzliches Zeichen. Insbesondere wird keine Funktor-Argument-Struktur verlangt. Das Inversionsprinzip (Lorenzen 1955, § 4), das vom Standpunkt der beweistheoretischen Semantik die Ableitung von Beseitigungsregeln aus Einführungsregeln erlaubt, ist so formuliert, daß es auf beliebige Grundregeln anwendbar ist, die dann als Definitionsregeln für Atome aufgefaßt werden. Beim Fehlen einer Funktor-Argument-Struktur sind dabei allerdings gewisse Besonderheiten zu beachten, auf die Hans Hermes (1959) hingewiesen hat. Lorenzens Ansatz ist jedenfalls wesentlich allgemeiner als die konventionelle beweistheoretische Semantik und enthält eine Theorie induktiver Definitionen, einschließlich bestimmter darauf bezogener Ideen, die erst in der Logikprogrammierung wieder signifikant geworden sind. Darauf wird in Abschnitt 4 noch eingegangen.

### 3.4. Reduktion und Inversion

In der beweistheoretischen Semantik ist ein geschlossener Beweis gültig, wenn er entweder eine Einführungsregel im letzten Schritt verwendet oder unter Verwendung des Systems  $\mathcal{J}$  von Rechtfertigungen in einen solchen Beweis umgeformt werden kann. Solange wir nun ohne Implikation (und Allquantifikation im quantorenlogischen Fall) arbeiten, könnten wir fordern, daß ein Beweis gültig ist, wenn er sich in einen Beweis umformen läßt, der ausschließlich Einführungsregeln anwendet. Denn dann wären die Prämissenableitungen  $\mathcal{D}_i$  einer geschlossenen Ableitung

$$\frac{\begin{array}{c} \mathcal{D}_1 \quad \dots \quad \mathcal{D}_n \\ A_1 \quad \dots \quad A_n \end{array}}{A} \text{ Einführungsregel,}$$

die im letzten Schritt eine Einführungsregel anwendet, selbst wieder geschlossen, so daß ein gültiges  $\mathcal{D}_i$  selbst wieder in Einführungsform transformiert werden kann, usw. Dieser Fall hätte seine Parallele bei Lorenzen wie folgt: Mit Regeln, die nicht kanonisch sind (d.h., die keine Einführungsregeln sind, also nicht zum Ausgangskalkül  $K$  gehören), werden Rechtfertigungsverfahren  $\mathcal{J}$  assoziiert, die ihre Zulässigkeit sicherstellen. Lorenzen spricht hier von *Eliminationsverfahren*, da diese Verfahren es erlauben müssen, Anwendungen solcher Regeln zu eliminieren, d.h. zu garantieren, daß Ableitungen ihrer Prämissen in  $K$  in Ableitungen ihrer Konklusion in  $K$  umgeformt werden können (Lorenzen 1955, § 3). Dann gilt natürlich, daß Beweise, die neben Regeln von  $K$  noch solcherart gerechtfertigte Regeln verwenden, d.h. nichtkanonische Beweise, in Beweise umgeformt werden können, die diese Regeln nicht verwenden, also kanonisch sind. Die beweistheoretische Gültigkeit einer Regel würde deren Zulässigkeit entsprechen, und ein Beweis wäre genau dann gültig in Bezug auf ein System  $\mathcal{J}$  von Rechtfertigungen (=Eliminationsverfahren), wenn er nur solche Regeln verwendet, die bezüglich  $\mathcal{J}$  zulässig sind.



Die Betrachtung des Falles ohne Annahmeregeln und Implikationen zeigt, daß der Gültigkeitsbegriff für Beweise auf einen Gültigkeitsbegriff für Regeln zurückführbar ist, d.h. Beweise sind gültig, wenn sie aus Anwendungen gültiger Regeln bestehen. Daher könnte man meinen, daß der operativen Logik die Grundidee der beweistheoretischen Semantik fehlt, wonach Gültigkeit von *Beweisen* der zentrale Begriff ist, auf die sich die Gültigkeit von Regeln zurückführen läßt. Dieser Eindruck entsteht jedoch nur dann, wenn man die unterste Ebene der operativen Logik betrachtet, d.h. einfache Zulässigkeitsbehauptungen ohne Betrachtung von Implikationen. Wenn man hingegen auch “uneigentliche” Regeln wie

$$(R) \quad A \rightarrow B \dot{\rightarrow} A \supset B$$

als Grundregeln für eine explizite Implikation betrachtet, dann führt dies in natürlicher Weise zum Reduktions- und Gültigkeitsbegriff der beweistheoretischen Semantik. Von einem geschlossenen Beweis, der die Regel (R) im letzten Schritt anwendet, können wir ja nicht erwarten, daß seine Prämisse selbst ein geschlossener Beweis ist. Vielmehr können wir nur erwarten, daß sich seine Prämisse rechtfertigen läßt (in bezug auf gegebene Rechtfertigungs-/Eliminationsverfahren), und das heißt, daß wir die Zulässigkeit von  $A \rightarrow B$  durch diese Verfahren nachweisen können. Das entspricht aber gerade der Rechtfertigung eines offenen Beweises von  $B$  aus  $A$ , d.h. der Angabe eines Verfahrens, zu einem beliebigen kanonischen geschlossenen Beweis von  $A$  einen solchen von  $B$  zu konstruieren. Der Tatsache, daß in der beweistheoretischen Semantik die Gültigkeit von offenen Beweisen auf die Gültigkeit von geschlossenen Beweisen zurückgeführt wird, entspricht also bei Lorenzen die Idee von Zulässigkeitsannahmen. Sie wird dadurch versteckt, daß keine explizite Implikation zur Verfügung steht. Der Gültigkeitsbegriff der beweistheoretischen Semantik ist somit die natürliche Weiterentwicklung des Lorenzenschen Begriffs, sobald man explizite Implikationen zur Verfügung hat.<sup>18</sup>

Reduktionen der beweistheoretischen Semantik sind bei Lorenzen Eliminationsverfahren. Es ist dabei interessant zu sehen, daß das Prawitzsche Inversionsprinzip, das für die logischen Regeln die zentrale Methode darstellt, zu Reduktionen führt, die den für das natürliche Schließen von Prawitz diskutierten Reduktionen entsprechen. In der beweistheoretischen Semantik sind die zentralen Reduktionen Umwegreduktionen, indem sie die Aufeinanderfolge von Einführungs- und Beseitigungsregeln kontrahieren. Genau so läßt sich Lorenzens Inversionsprinzip (Lorenzen 1955, § 4) interpretieren, wie das von Enrico Moriconi und Laura Tesconi (Moriconi/Tesconi 2007) sehr klar herausgearbeitet worden ist: Seien nämlich im aussagenlogischen Fall (d.h. im Fall ohne freie

---

<sup>18</sup>In Schroeder-Heister (2008a,b) wird dieser Zusammenhang im einzelnen ausgeführt und auch technisch explizit gemacht.

Variablen)

$$\begin{array}{l} \Gamma_1 \rightarrow A \\ \vdots \\ \Gamma_n \rightarrow A \end{array}$$

die einzigen Grundregeln mit  $A$  als Konklusion, und seien die Regeln

$$\begin{array}{l} \Gamma_1 \rightarrow C \\ \vdots \\ \Gamma_n \rightarrow C \end{array}$$

zulässig. Dann besagt das Lorenzense Inversionsprinzip, daß auch  $A \rightarrow C$  zulässig ist — plakativ: “Was sich aus allen Prämissen der Einführung von  $A$  ergibt, das ergibt sich aus  $A$  selbst.” Die Lorenzense Rechtfertigung lautet wie folgt: Es werde die Regel  $A \rightarrow C$  angewendet:

$$\frac{\mathcal{D}'}{\frac{A}{C} A \rightarrow C}$$

wobei die Prämissenableitung zum betrachteten Kalkül  $K$ , der  $A \rightarrow C$  *nicht* enthält, gehört. Zu zeigen ist, daß auch  $C$  in  $K$  herleitbar ist. Da aber  $\mathcal{D}'$  im letzten Schritt eine der Regeln  $\Gamma_i \rightarrow A$  benutzt haben muß, d.h. die Situation

$$\frac{\mathcal{D}_i}{\frac{\frac{\Gamma_i}{A} \Gamma_i \rightarrow A}{C} A \rightarrow C}$$

vorliegt, kann man mithilfe der Regel  $\Gamma_i \rightarrow C$  direkt von  $\Gamma_i$  zu  $C$  übergehen:

$$\frac{\mathcal{D}_i}{\frac{\Gamma_i}{C} \Gamma_i \rightarrow C}$$

wobei  $\Gamma_i \rightarrow C$  nach Voraussetzung schon eliminierbar ist. Lorenzens Inversionsprinzip kann also als verallgemeinerte Fassung des Umwegreduktionsprinzips der beweistheoretischen Semantik verstanden werden, das die Dualität von Einführungs- und Beseitigungsregeln begründet. Insofern hat Prawitz den Terminus “Inversionsprinzip” zu Recht von Lorenzen übernommen. Lorenzen selbst generiert mithilfe dieses Prinzips die Beseitigungsregeln aus den Einführungsregeln für Konjunktion, Disjunktion und Existenzquantifikation. Führt man eine explizite Implikation ein, so kann man auch den *modus ponens* rechtfertigen und analog die Beseitigungsregel für den Allquantor.

Für die logischen Zeichen führt das Lorenzense Inversionsprinzip zu verallgemeinerten Beseitigungsregeln im Sinne von Schroeder-Heister (1984), bei denen Regeln als Annahmen erlaubt sind, und auch zu der von Jan von Plato (2001) propagierten Variante, die keine Regeln als Annahmen enthält<sup>19</sup>. Ganz allgemein führt es zu Prinzipien

---

<sup>19</sup>Die bei von Plato mit großer Emphase vorgeschlagenen Regeln wurden erstmals von Roy Dyckhoff (1988) in die Diskussion gebracht. Zur weiteren Geschichte dieser Regeln vgl. Schroeder-Heister (2004), Fußnote 10, S. 33.

wie dem der definatorischen Reflexion (siehe Abschnitt 4).

Lorenzen hat also mit seinem Inversionsprinzip und der Idee von Eliminationsverfahren grundlegende Ideen der beweistheoretischen Semantik vorweggenommen, gleichzeitig aber seine Prinzipien so allgemein formuliert, daß sie über die Anwendungen im natürlichen Schließen hinausweisen.

### 3.5. Negation und Unableitbarkeit

Die Negation wird von Lorenzen auf die im Intuitionismus übliche Weise über die Absurdität durch

$$\neg A := A \rightarrow \perp$$

definiert. Die Gesetze für die Negation erhält er über sein “Unableitbarkeitsprinzip” (Lorenzen 1955, § 5): Falls  $A$  nicht ableitbar ist, ist  $A \rightarrow B$  zulässig, da die Regel  $A \rightarrow B$  gar nicht angewendet sein kann und somit jede Anwendung trivialerweise eliminierbar ist. Für  $\perp$  muß jetzt einfach eine Aussage gewählt werden, die *per definitionem* nicht ableitbar ist. Das Unableitbarkeitsprinzip ist damit der Grenzfall des Inversionsprinzips für den Fall, daß keine definierenden Regeln für  $\perp$  vorhanden sind. In diesem Fall erhält man das *ex falso quodlibet*  $\perp \rightarrow B$  aufgrund der Überlegung, daß die (metasprachlichen) Prämissen des Inversionsprinzips leer sind,  $\perp \rightarrow B$  also in jedem Fall zulässig ist. Das unterscheidet sich nicht weiter vom beweistheoretischen Ansatz, in dem ebenfalls die Absurditätsregel der Grenzfall einer Beseitigungsregel ist für den Fall, daß *per definitionem* keine Einführungsregel vorhanden ist.<sup>20</sup>

Für die Gewinnung der *intuitionistischen* Logik ist diese Idee grundlegend, für das Konzept der beweistheoretischen Semantik jedoch nicht. Man könnte sich ebenfalls vorstellen, daß statt der *indirekten* Deutung der Negation über die Absurdität eine *direkte* Deutung über explizite Bestreitungsregeln etwa im Sinne von David Nelson (1949) versucht wird. Neuere Entwicklungen der beweistheoretischen Semantik diskutieren diesen Ansatz, der zu anderen Systemen als der intuitionistischen Logik führt (Schroeder-Heister 1981, 2005, 2006b, Wansing 1993, 2001). Für den Vergleich zwischen den Ansätzen von Lorenzen und Prawitz liefert die Betrachtung der Negation

---

<sup>20</sup>Diese Darstellung entspricht nicht exakt der Lorenzenschen Präsentation. In der Definition der Negation (Lorenzen 1955, § 8) verwendet Lorenzen als *falsum* von vornherein ein beliebiges Wort  $C$ , für das  $C \rightarrow B$  für beliebige Wörter  $B$  zulässig ist, und gewinnt damit die Negationsgesetze direkt aus den Implikationsgesetzen, ohne das Unableitbarkeitsprinzip einzusetzen. Das ändert aber nichts daran, daß man das *ex falso quodlibet* für ein solches *falsum*-Wort  $C$  in nichttrivialen Fällen nur über das Unableitbarkeitsprinzip gewinnt. Bekanntlich unterscheidet das *ex falso quodlibet* die intuitionistische Logik von der schwächeren Minimallogik, deren Negationsgesetze Spezialfälle der Implikationsgesetze sind.

allerdings nichts neues, da beide über die bekannten intuitionistischen Prinzipien nicht hinausgehen.<sup>21</sup>

Auf einen originellen Aspekt von Lorenzens Unableitbarkeitstheorie, der kein direktes Analogon in der beweistheoretischen Semantik — wohl aber in formalen Unifikations- und Gleichheitstheorien (Sahlin et al. 1992, Schroeder-Heister 1994) — hat, sollte hier zumindest hingewiesen werden: Um festzustellen, daß  $\perp$  ein nicht ableitbares *falsum*-Wort ist, muß gezeigt werden, daß  $\perp$  von allen ableitbaren Wörtern verschieden ist. Diese Verschiedenheit wird bei Lorenzen nicht einfach als metasprachlich zu konstatieren aufgefaßt, sondern in einer kalkülinternen Theorie der Ungleichheit abgehandelt, die es gestattet, Ungleichheitsurteile der Form  $a \neq b$  nach bestimmten Regeln herzuleiten, und die ein zentraler Bestandteil der Lorenzenschen Gleichheitstheorie ist (Schroeder-Heister 2008b).

### 3.6. Operative Semantik und die BHK-Interpretation der logischen Zeichen

In der intuitionistischen Tradition stellt die Brouwer-Heyting-Kolmogorov-[BHK]-Interpretation die maßgebliche Deutung der logischen Zeichen dar, die zu einem anderen logischen Formalismus als der klassischen Logik führt. Grob gesprochen definiert man induktiv den Begriff der *Konstruktion* oder des *konstruktiven Beweises* einer Aussage, wobei man annimmt, daß Konstruktionen atomarer Aussagen schon gegeben sind. Für den aussagenlogischen Fall kann man die Klauseln für zusammengesetzte Aussagen wie folgt angeben:

- Eine Konstruktion von  $A \wedge B$  ist ein Paar  $\langle k_1, k_2 \rangle$ , bestehend aus einer Konstruktion  $k_1$  von  $A$  und einer Konstruktion  $k_2$  von  $B$ .
- Eine Konstruktion von  $A \vee B$  ist ein Paar  $\langle i, k \rangle$ , wobei entweder  $i = 1$  und  $k$  eine Konstruktion von  $A$  oder  $i = 2$  und  $k$  eine Konstruktion von  $B$  ist.
- Eine Konstruktion von  $A \rightarrow B$  ist ein konstruktives Verfahren  $k$ , das, angewandt auf eine beliebige Konstruktion  $k_1$  von  $A$  eine Konstruktion  $k(k_1)$  von  $B$  liefert.
- Eine Konstruktion von  $\perp$  ist nicht definiert.

Eine Konstruktion einer Aussage ist also ein abstraktes Objekt, das durch diese Klauseln spezifiziert ist. Der Begriff des konstruktiven Verfahrens als eines zentralen Grundbegriffs läßt sich durch Begriffe aus der Theorie berechenbarer Funktionen und des Lambda-Kalküls präzisieren.

---

<sup>21</sup>In Prawitz (1965) wird der Nelsonsche Ansatz zur direkten Negation am Rande diskutiert, in den späteren Arbeiten zur beweistheoretischen Semantik aber nicht wieder aufgegriffen.

Die beweistheoretische Semantik im Sinne von Prawitz setzt sich insofern von dieser allgemeinen Konzeption ab, als in ihr der Begriff der Konstruktion und des konstruktiven Verfahrens genauer spezifiziert wird. Den Konstruktionen im BHK-Sinne entsprechen jetzt kanonische Beweise, und konstruktive Verfahren werden als konkrete Beweisreduktionsverfahren interpretiert, d.h. Umformungen, die sich an vorliegenden Beweisstrukturen vollziehen und die nicht nur Transformationen abstrakter Objekte sind. Außerdem wird ein *relativer* Gültigkeitsbegriff vorgelegt, d.h. Gültigkeit wird nicht absolut, sondern relativ zu einem gegebenen System  $\mathcal{J}$  von Rechtfertigungen (Beweisreduktionen) verstanden. In diesem besonderen Sinne ist die beweistheoretische Semantik eine Fortentwicklung der BHK-Semantik unter Einbeziehung beweistheoretischer Konzepte.

Vieles davon läßt sich auch für die operative Semantik Lorenzens behaupten. Diese ist ebensowenig wie die beweistheoretische Semantik eine Theorie abstrakter Konstruktionen im Sinne der BHK-Semantik, sondern eine Theorie von Zulässigkeitsverfahren, die die Eliminierbarkeit von Regeln aus Beweiszusammenhängen zeigen, d.h. eine Theorie von Beweisumformungen. Sie erreicht noch nicht die Stufe der beweistheoretischen Semantik mit deren Relativierung des Gültigkeitsbegriffs — Lorenzen benutzt immer einen absoluten Zulässigkeitsbegriff, wonach Regeln zulässig sind (oder auch nicht zulässig sind), nicht jedoch, wonach Regeln je nach vorausgesetztem Repertoire an Umformungsverfahren einmal zulässig und das andere Mal nicht zulässig sein können. In letzterem Sinne ist die beweistheoretische Semantik ein genuiner Fortschritt gegenüber der operativen Semantik. Die operative Semantik steht systematisch zwischen BHK-Semantik und beweistheoretischer Semantik.

#### **4. Jenseits der logischen Semantik: Atomare Beweistheorie und universelle Inversion**

Tenor der bisherigen Überlegungen war, daß Lorenzen zentrale Ideen, die in der Gültigkeitsdefinition der beweistheoretischen Semantik ausgearbeitet worden sind, vorweggenommen hat, so daß er zu Recht als Wegbereiter dieses Ansatzes gelten kann, jedenfalls im Sinne einer “Gründegeschichte” (Mittelstraß), die den systematischen Zusammenhang zwischen diesen Theorien rekonstruiert. An zahlreichen Stellen wurde jedoch auch angedeutet, daß der Lorenzensche Ansatz sehr viel allgemeiner und weiterführender als die Prawitzsche beweistheoretische Semantik ist. Das soll im folgenden konkretisiert werden.

Wenn man Lorenzens operative Logik vom Standpunkt der beweistheoretischen Semantik Prawitz’ betrachtet, versteht man sie als Theorie logischer Zeichen.

Einführungsregeln wie diejenigen für Konjunktion, Disjunktion und Existenzquantifikation rücken in den Vordergrund, die Theorie der Zulässigkeit wird als Semantik der Implikation verstanden und das Inversionsprinzip wird zum Werkzeug, Beseitigungsregeln für logische Zeichen aus deren Einführungsregeln zu generieren. Tatsächlich ist die Lorenzensche Theorie wesentlich universeller: Kalküle operieren auf beliebigen Wörtern über beliebigen Alphabeten, und das Inversionsprinzip ist unabhängig davon, daß die eingeführten Wörter logisch zusammengesetzt sind. Über die Logizität von Zeichen wird nichts vorausgesetzt. Vielmehr sind die Regeln für  $\wedge$ ,  $\vee$  und  $\exists$  spezielle Anwendungen einer allgemeinen Theorie, die eher mit neueren, aus der Logikprogrammierung herrührenden Ansätzen verwandt ist als mit der logikorientierten beweistheoretischen Semantik.

In diesem Zusammenhang soll hier von “atomarer Beweistheorie” gesprochen werden, weil es nicht um Beweise logisch zusammengesetzter Aussagen geht, sondern um die Ableitung von atomaren Aussagen (*Atomen*). Auch diese Bezeichnung ist nicht ganz glücklich, weil sie suggeriert, daß nach den Atomen noch die komplexen, d.h. logisch zusammengesetzten Nicht-Atome kommen. Tatsächlich geht es aber um die Beweistheorie unabhängig von der Unterscheidung ‘atomar vs. logisch zusammengesetzt’. Im Sinne der atomaren Beweistheorie sind logisch zusammengesetzte Aussagen ein Spezialfall von Atomen.

Von einem anderen Standpunkt aus kann man Lorenzens Theorie auch als Theorie induktiver Definitionen ansehen, insofern ja induktive Definitionen nichts anderes als Regelsysteme sind (Aczel 1977).<sup>22</sup> Dazu soll Lorenzens Ansatz hier mit der Theorie definitorischer Reflexion in Beziehung gesetzt werden, die von Hallnäs und Schroeder-Heister (1990, 1991) ursprünglich im Zusammenhang mit Problemen der Logikprogrammierung entwickelt worden ist. In dieser Theorie wird versucht, die Dualität von Einführungs- und Beseitigungsregeln bzw. von Behauptungs- und Annahmeregeln für die Logikprogrammierung fruchtbar zu machen, und gleichzeitig ein neuartiges Konzept hypothetischen Rasonnierens auf der Basis induktiver Definitionen vorgeschlagen.<sup>23</sup>

---

<sup>22</sup>Induktive Definitionen können überhaupt als der wesentliche Gegenstand der Gesamtwerts der *Operativen Logik* angesehen werden: Lorenzens Begründung des konstruktiven Mathematik basiert auf der (transfinit iterierbaren) Konstruktion induktiver Definitionen.

<sup>23</sup>Die Idee, atomare Definitionsregeln für Prädikate beweistheoretisch mit der Konzeption von Einführungs- und Beseitigungsregeln zu behandeln, wurde schon von Martin-Löf (1971) in seiner Theorie iterierter induktiver Definitionen vorgeschlagen, allerdings mit anderer Syntax und etwas anderer Zielsetzung.

In der Logikprogrammierung betrachtet man beliebige Regelsysteme

$$\mathbb{D} \left\{ \begin{array}{l} A_1 \leftarrow \Delta_{11} \\ \vdots \\ A_1 \leftarrow \Delta_{1m_1} \\ \vdots \\ A_n \leftarrow \Delta_{n1} \\ \vdots \\ A_n \leftarrow \Delta_{nm_n} \end{array} \right.$$

als *Programme* oder *Definitionen*, wobei die  $\Delta_{ij}$  Listen von Atomen sind und Grundregeln, wie in der Logikprogrammierung üblich, in invertierter Form, d.h. beginnend mit ihrem Kopf (Konklusion) notiert werden. In bezug auf ein Programm, das man als induktive Weltbeschreibung lesen kann, stellt man die Frage

$$? - A,$$

die verstanden wird als

$$(?\theta) \vdash_{\mathbb{D}} A\theta :$$

“Für welche Substitution  $\theta$  ist das Atom  $A\theta$  in  $\mathbb{D}$  herleitbar?”, d.h. “Für welche Substitution  $\theta$  gilt  $A\theta$  in  $\mathbb{D}$ ?”. Die Auswertungsprozedur (SLD-Resolution) liefert dann entsprechende Antworten. Offenbar kann man Lorenzensehe Kalkülregeln als Programmregeln in diesem Sinne auffassen, wobei wegen des Fehlens der Funktor-Argumentstruktur Lorenzensehe Regeln allgemeiner als übliche Regeln der Logikprogrammierung sind.

Bei verallgemeinerten Ansätzen läßt man *hypothetische* Anfragen zu:

$$? - \Gamma \vdash A,$$

was verstanden wird als

$$(?\theta) \Gamma\theta \vdash_{\mathbb{D}} A\theta :$$

“Für welche Substitution  $\theta$  ist das Atom  $A\theta$  aus dem Annahmensystem  $\Gamma\theta$  in  $\mathbb{D}$  herleitbar?”. Das ist aber immer noch eine Frage nach dem, was man durch Anwendung der Regeln aus  $\mathbb{D}$  gewinnen kann, noch ohne Prinzipien miteinzubeziehen, die bestehende Regelsysteme erweitern.

Die Idee der definitonischen Reflexion besteht nun darin, auch Schemata zur Anwendung von Regeln hinzuzunehmen, die direkt das beeinflussen, was man *annehmen* kann, die also gewissermaßen *direkt* das *Rückwärtsräsonnieren* im Unterschied zum *Vorwärtsräsonnieren* betreffen. Das läßt sich am besten durch Verwendung eines Sequenzenkalküls erläutern, wobei zunächst nur der aussagenlogische Fall (unzerlegbare

Aussagen ohne Variablen) betrachtet werden soll. Vorwärtsrasonieren entsprechend einer Programmregel

$$(R) \quad A \leftarrow A_1, \dots, A_n$$

wird durch das Schema der Rechtseinführung von  $A$  gedeutet:

$$\frac{\Gamma \vdash A_1 \quad \dots \quad \Gamma \vdash A_n}{\Gamma \vdash A} (\vdash A).$$

Die Regel  $R$  wird also als Einführungsregel für  $A$  verstanden. Dem soll nun — das ist die Idee der definatorischen Reflexion — eine Regel der Linkseinführung von  $A$  entsprechen, die wie folgt formuliert wird: Seien

$$\mathbb{D}_A \quad \left\{ \begin{array}{l} A \leftarrow \Delta_1 \\ \vdots \\ A \leftarrow \Delta_m \end{array} \right.$$

exakt diejenigen Regeln des Programms  $\mathbb{D}$ , die es erlauben,  $A$  einzuführen. Dann soll alles das, was aus allen Prämissen für  $A$  herleitbar ist, auch aus  $A$  selbst herleitbar sein:

$$\frac{\Gamma, \Delta_1 \vdash C \quad \dots \quad \Gamma, \Delta_m \vdash C}{\Gamma, A \vdash C} (A\vdash).$$

Dieses Schema wird als “definatorische Reflexion” bezeichnet, weil es die Abschlußbedingung von Definitionen als eigenes Schema formuliert: Durch Reflexion auf die gegebenen definatorischen Regeln stellen wir fest, daß  $A$  *ausschließlich* durch die Regeln  $\mathbb{D}_A$  definiert wird. Also wissen wir, daß ein vorliegendes  $A$  nur entsprechend einer dieser Regeln gewonnen werden kann und somit in jedem Fall alles dasjenige herzuleiten gestattet, was *alle* definatorischen Bedingungen von  $A$  herzuleiten gestatten. Man könnte sagen, daß  $A$  den *gemeinsamen Gehalt* aller seiner definatorischen (“kanonischen”) Bedingungen ausdrückt.<sup>24</sup> Aufgrund der Beziehung zur Abschlußbedingung von Definitionen ziehen wir (Hallnäs und Schroeder-Heister) es vor, von einer *definatorischen* Theorie zu sprechen, die die übliche Theorie (monotoner) induktiver Definitionen erweitert. Für die Logikprogrammierung ist die definatorische Reflexion von besonderer Signifikanz, erweitert sie doch deren Ausdruckskraft erheblich<sup>25</sup>.

Das Prinzip der definatorischen Reflexion kann man nun als direkte Reformulierung des Lorenzenschen Inversionsprinzips ansehen (obwohl es bei seiner Konzipierung

---

<sup>24</sup>Die definatorische Reflexion entspricht damit der Idee, Junktoren und Quantoren im allgemeinen Sinne durch den *gemeinsamen Gehalt* von Regelsystemen zu charakterisieren (Schroeder-Heister 1984, 1987). Allerdings geht erstere sehr viel weiter, weil sie beliebige Regelsysteme im Sinne von Logikprogrammen als Einführungsregeln betrachtet.

<sup>25</sup>Z.B. können unter gewissen Bedingungen Negationen von Atomen, die Variablen enthalten, ausgewertet werden (Hallnäs/Schroeder-Heister 1991).



nicht als solche intendiert war<sup>26</sup>). Eingeschränkt auf die Aussagenlogik besagt das Inversionsprinzip, daß, gegeben die definatorischen Klauseln  $\mathbb{D}_A$ , mit der Zulässigkeit der Regeln

$$\Delta_1 \rightarrow C$$

⋮

$$\Delta_m \rightarrow C$$

auch die Regel

$$A \rightarrow C$$

zulässig ist. Die Überlegungen Lorenzens zur Rechtfertigung dieses Prinzips entsprechen denjenigen für die definatorische Reflexion: Wir schließen von  $A$  auf die kanonischen (“definatorischen”, “unmittelbaren”) Bedingungen seiner Einführung und wenden darauf die Prämissenregeln des Inversionsprinzips an. Versteht man also eine Sequenz  $\Gamma \vdash C$  als Behauptung der Zulässigkeit der Regel  $\Gamma \rightarrow C$  und entsprechend den zur Auswertung von Klauseln aufgestellten Sequenzenkalkül mit den Ableitungsschemata  $(\vdash A)$  und  $(A\vdash)$  als Kalkül für Zulässigkeitsbehauptungen, dann ist das Prinzip der definatorischen Reflexion nichts anderes als das Inversionsprinzip.

Im Falle des Vorhandenseins von Gegenstandsvariablen fallen beide Prinzipien nicht mehr zusammen. Die spezifische Form des Lorenzenschen Inversionsprinzips — unter Berücksichtigung der Korrekturen von Hans Hermes (1959)<sup>27</sup> — bringt aber originelle Gesichtspunkte ins Spiel, die auch bei Anwendungen der definatorischen Reflexion in der Logikprogrammierung eine Rolle spielen. Betrachten wir etwa folgendes Regelsystem:

$$\left\{ \begin{array}{l} A(c_1) \leftarrow B \\ A(c_2) \leftarrow B \end{array} \right.$$

Wie ist hier die Formel  $A(x)$  mit freier Variablen  $x$  zu invertieren? Gilt

$$A(x) \vdash B$$

als Zulässigkeitsbehauptung? Lorenzens Antwort ist: Ja. Denn selbst wenn mehr Objekte als nur  $c_1$  und  $c_2$  zur Verfügung stehen, kann die Regel  $A(x) \rightarrow B$  nur für die Einsetzungen  $x/c_1$  oder  $x/c_2$  angewendet werden, da nur dafür eine Einführungsregel existiert. Da in beiden Fällen  $B$  die unmittelbare Prämisse der Einführungsregel ist, können wir davon ausgehen, daß  $B$  ableitbar ist. Wie steht es dann aber mit den anderen Fällen? Die Regel  $A(x) \rightarrow B$  soll doch zulässig sein für beliebige Einsetzungen für  $x$ . Die Antwort ist, daß in allen anderen Fällen das Unableitbarkeitsprinzip zuständig ist: Z.B. ist die Regel  $A(c_3) \rightarrow B$  deshalb zulässig, weil  $A(c_3)$  gar nicht ableitbar ist, auch wenn  $c_3$  als Objekt vorhanden ist.

---

<sup>26</sup>und Hallnäs/Schroeder-Heister bei der Verfassung ihrer Arbeiten nicht an Lorenzen gedacht hatten.

<sup>27</sup>die Lorenzen in der zweiten Auflage der *Operativen Logik* (1969) leider nicht hinreichend implementiert hat.

Die definatorische Reflexion in ihrer allgemeinsten Form geht hier noch weiter und erlaubt z.B. die Generierung von Sequenzen

$$A(x) \vdash B(x),$$

falls das Regelsystem

$$\begin{cases} A(c_1) \leftarrow B(c_1) \\ A(c_2) \leftarrow B(c_2) \end{cases}$$

gegeben ist. Obzwar stärker als das Lorenzensehe Inversionsprinzip, ist dieses Prinzip ebenfalls durch die Zulässigkeitsinterpretation von Sequenzen gedeckt. Die genaue Formulierung und die Abhängigkeiten zwischen den verschiedenen Formen der definatorischen Reflexion und des Inversionsprinzips im Zusammenhang mit Gegenstandsvariablen werden im einzelnen in Schroeder-Heister (2007) untersucht. Verallgemeinerte Formen der Inversion erlauben beispielsweise, die Theorie der freien Gleichheit aus der einzigen prämissenfreien Grundregel (Axiom)

$$x = x \leftarrow$$

herzuleiten (Girard 1992, Hallnäs/Schroeder-Heister 1992, Schroeder-Heister 1994). Lorenzens eigene Gleichheitstheorie (1955, § 9) geht von damit verwandten Prinzipien aus. Auch findet sich bei Lorenzen (1955, S. 173) unter dem Stichwort der Überführung eines Regelsystems in eine Explizitdefinition schon exakt die Formulierung dessen, was man später in der Logikprogrammierung nach Keith Clark (1978) die Vervollständigung (“completion”) von Logikprogrammen nennt.

So betrachtet liefert Lorenzen mit seiner Theorie von Regelsystemen und Zulässigkeitsbehauptungen einen Ansatz, der für die 25 Jahre später entwickelte Logikprogrammierung unmittelbar relevant ist. Auch sollte man die Signifikanz für nicht-monotone Konzepte nicht unterschätzen, da ja die Anwendung des Inversionsprinzips nicht monoton in bezug auf das Regelsystem  $\mathbb{D}$  ist. Wenn  $\mathbb{D}$  zu einem neuen Definitionssystem  $\mathbb{D}' \supseteq \mathbb{D}$  erweitert wird durch Hinzunahme einer neuen Einführungsregel

$$A \leftarrow \Delta_{m+1}$$

für  $A$ , dann verliert möglicherweise eine Regel  $A \rightarrow C$ , die aufgrund Inversion bezüglich  $\mathbb{D}$  zulässig wäre, ihre Zulässigkeit, falls nämlich die neue Definitionsregel  $\Delta_{m+1} \rightarrow C$  in  $\mathbb{D}'$  nicht zulässig ist, oder falls eine der “alten” zulässigen Regeln  $\Delta_i \rightarrow C$  ihre Zulässigkeit verliert. Zulässigkeit bezüglich eines Systems  $\mathbb{D}$  ist kein bezüglich  $\mathbb{D}$  monotoner Begriff.

Die Theorie der definatorischen Reflexion von Hallnäs/Schroeder-Heister geht allerdings weiter, indem neben  $\vdash$  noch eine explizite Implikation betrachtet wird, die die einfache Interpretation von  $\vdash$  als Zulässigkeit ausschließt, es dafür aber z.B. erlaubt, zirkuläre Definitionen wie

$$A \leftarrow \neg A,$$

d.h.

$$A \leftarrow (A \supset \perp)$$

zu behandeln (Schroeder-Heister 2004).

Die Idee von Definitionen als abgeschlossenen Regelsystemen, die grundlegend für die Inversion in der operativen Logik ist, hat Lorenzen auch in seinen späteren sprachphilosophischen Schriften beibehalten — teilweise allerdings unter Verwendung eines umgekehrten Ansatzes, bei dem Systeme von Beseitigungsregeln am Anfang stehen und diese durch Einführungsregeln abgeschlossen werden wie in der *Logischen Propädeutik* (Kamlah/Lorenzen 1967). Leider hat er diese Ideen nicht weiter ausgearbeitet.

## Literaturverzeichnis

- Abramsky, Samson / Mavronicolas, Marios (Hrsg.). 2005. *Game Theory Meets Theoretical Computer Science*. Special issue of *Theoretical Computer Science*, **343** (1–2), 1–281.
- Aczel, Peter. 1977. An introduction to inductive definitions. In: J. Barwise (Hrsg.), *Handbook of Mathematical Logic*, Amsterdam, 739–782.
- Brandom, Robert B. 2000. *Articulating Reasons: An Introduction to Inferentialism*, Cambridge Mass.: Harvard University Press.
- Clark, Keith L. 1978. Negation as failure. In: H. Gallaire / J. Minker (Hrsg.), *Logic and Data Bases*. New York, 293–322.
- Curry, Haskell B. 1958. *Outlines of a Formalist Philosophy of Mathematics*, Amsterdam.
- Došen, Kosta. 1989. Logical constants as punctuation marks. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, **30**, 362–381, geringfügig überarbeitet in: D. Gabbay (Hrsg.), *What is a Logical System?*, Oxford 1994, pp. 273–296.
- Dummett, Michael. 1991. *The Logical Basis of Metaphysics*, London.
- Dyckhoff, Roy. 1988. Implementing a simple proof assistant. In: *Workshop on Programming for Logic Teaching* (Leeds, 6-8 July 1987). Centre for Theoretical Computer Science, University of Leeds, Proceedings 23/1988, 49–59.
- Gentzen, Gerhard. 1934/35. Untersuchungen über das logische Schließen. *Mathematische Zeitschrift* **39** (1934/35), 176–210, 405–431.
- Girard, Jean-Yves. 1971. Une extension de l’interprétation de Gödel à l’analyse, et son application à l’élimination des coupures dans l’analyse et la théorie des types. In: J.E. Fenstad (Hrsg.), *Proceedings of the 2nd Scandinavian Logic Symposium (Oslo 1970)*, Amsterdam, 63–92.
- . 1992. A fixpoint theorem for linear logic. In: P. Lincoln (Hrsg.), *Linear Logic Mailing List*, linear@cs.stanford.edu, 5 February 1992. Archiviert unter: <http://www.seas.upenn.edu/~sweirich/types/archive/1992/msg00030.html>
- Hallnäs, Lars / Schroeder-Heister, Peter. 1990. A proof-theoretic approach to logic programming. I. Clauses as rules. *Journal of Logic and Computation* **1** (1990/91), 261–283.
- . 1991. A proof-theoretic approach to logic programming. II. Programs as definitions. *Journal of Logic and Computation* **1** (1990/91), 635–660.
- . 1992. Girard’s “Fixpoint Theorem” (Erwiderung auf Girard 1992). In: P. Lincoln (Hrsg.), *Linear Logic Mailing List*, linear@cs.stanford.edu, 19 February

1992. Archiviert unter:  
<http://www.seas.upenn.edu/~sweirich/types/archive/1992/msg00043.html>
- Hermes, Hans. 1959. Zum Inversionsprinzip der operativen Logik. In: A. Heyting (Hrsg.), *Constructivity in Mathematics*, Amsterdam, 62–68.
- Kahle, Reinhard / Schroeder-Heister, Peter (Hrsg.). 2006. *Proof-Theoretic Semantics*. Themenheft von *Synthese*, **148** (3), 503–756. Einleitung: Ibid., 503–506.
- Kamlah, Wilhelm / Lorenzen, Paul. 1967. *Logische Propädeutik. Vorschule des vernünftigen Redens. Mannheim, 2. Aufl. 1973*.
- Kutschera, Franz v. 1996. Frege and natural deduction. In: M. Schirn (Hrsg.), *Frege: Importance and Legacy*, Berlin, 301–304.
- Lorenzen, Paul. 1950. Konstruktive Begründung der Mathematik. *Mathematische Zeitschrift* **53**, 162–202.
- . 1955. *Einführung in die operative Logik und Mathematik*. Berlin, 2. Aufl. 1969.
- Marion, Mathieu. 2007. Why play logical games? In: O. Majer / A.-V. Pietarinen / T. Tulenheimo (Hrsg.), *Logic and Games: Foundational Perspectives*, Berlin.
- Martin-Löf, Per. 1971. Hauptsatz for the intuitionistic theory of iterated inductive definitions. In: J.E. Fenstad (Hrsg.), *Proceedings of the 2nd Scandinavian Logic Symposium (Oslo 1970)*, Amsterdam, 179–216.
- Moriconi, Enrico / Tesconi, Laura. 2007. On inversion principles (zur Publikation eingereicht).
- Plato, Jan von. 2001. Natural deduction with general elimination rules. *Archive for Mathematical Logic* **40**, 541–567.
- Post, Emil L. 1921. Introduction to a general theory of elementary propositions. *American Journal of Mathematics*, **43**, 163–185.
- . 1943. Formal reductions of the general combinatorial decision problem. *American Journal of Mathematics*, **65**, 197–215.
- Prawitz, Dag 1965. *Natural Deduction: A Proof-Theoretical Study*. Stockholm.
- . 1971. Ideas and results in proof theory. In: J.E. Fenstad (Hrsg.), *Proceedings of the 2nd Scandinavian Logic Symposium (Oslo 1970)*, Amsterdam, 235–308.
- . 1973. Towards a foundation of a general proof theory. In: P. Suppes et al. (Hrsg.), *Logic, Methodology, and Philosophy of Science IV*, Amsterdam, 225–250.
- . 1974. On the idea of a general proof theory, *Synthese* **27**, 63–77.

- . 1985. Remarks on some approaches to the concept of logical consequence, *Synthese* **62**, 152–171.
- . 2006. Meaning approaches via proofs. In: R. Kahle / P. Schroeder-Heister (Hrsg.), *Proof-Theoretic Semantics*. Themenheft von *Synthese*, **148** (3), 507–524.
- Rahman, Shahid / Rückert, Helge (Hrsg.) (2001). *New Perspectives in Dialogical Logic*. Themenheft von *Synthese*, **127** (1-2).
- Sahlin, Dan / Franzén, Torkel / Haridi, Seif. 1992. An intuitionistic predicate logic theorem prover. *Journal of Logic and Computation* **2**, 619–656.
- Schroeder-Heister, Peter. 1981. *Untersuchungen zur regellogischen Deutung von Aussagenverknüpfungen*. Diss. Universität Bonn. Herunterladbar von der homepage des Autors.
- . 1984. A natural extension of natural deduction. *Journal of Symbolic Logic* **49**, 1284–1300.
- . 1987. *Structural Frameworks with Higher-Level Rules*. Habilitationsschrift. Fachgruppe Philosophie, Universität Konstanz. Herunterladbar von der homepage des Autors.
- . 1994. Definitional reflection and the completion. In: R. Dyckhoff (Hrsg.), *Extensions of Logic Programming. Proceedings of the 4th International Workshop, ELP '93, St. Andrews, March/April 1993*. Berlin, 333–347.
- . 1997. Frege and the resolution calculus, *History and Philosophy of Logic* **18**, 95–108.
- . 1999. Gentzen-style features in Frege. *Abstracts of the 11th International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science*, Cracow, Poland (August 1999), 449.
- . 2002. Resolution and the origins of structural reasoning: Early proof-theoretic ideas of Hertz and Gentzen, *Bulletin of Symbolic Logic* **8** (2002), 246–265.
- . 2004. On the notion of *assumption* in logical systems. In: R. Bluhm / C. Nimtz (Hrsg.), *Selected Papers Contributed to the Sections of GAP5, Fifth International Congress of the Society for Analytical Philosophy, Bielefeld, 22-26 September 2003*, Paderborn, 27–48.
- . 2005. Generalized rules, direct negation, and definitional reflection. Vortragsszusammenfassung für den *First World Congress on Universal Logic (UNILOG 2005, Montreux, Switzerland)*. Herunterladbar von der homepage des Autors.

- . 2006a. Validity concepts in proof-theoretic semantics. In: R. Kahle / P. Schroeder-Heister (Hrsg.), *Proof-Theoretic Semantics*. Themenheft von *Synthese*, **148** (3), 525–571.
- . 2006b. *Assertion and denial* in proof-theoretic semantics. Vortragszusammenfassung für *GAP6, Sixth International Congress of the Society for Analytical Philosophy, Berlin, 11-14 September 2006*. Herunterladbar von der homepage des Autors.
- . 2007. Generalized definitional reflection and the inversion principle, *Logica Universalis* **2**.
- . 2008a. Operative logic and proof-theoretic semantics. In: E.H. Haeusler / L.C. Pereira (Hrsg.), *Advances in Natural Deduction* (Band in Begutachtung).
- . 2008b. Lorenzen’s operative justification of intuitionistic logic. In: M. van Atten, / P. Boldini / M. Bourdeau / G. Heinzmann (Hrsg.), *1907–2007, One Hundred Years of Intuitionism. The Cerisy Colloquium*. Basel.
- Schroeder-Heister, Peter / Contu, Patrizio. 2005. Folgerung. In: W. Spohn, P. Schroeder-Heister / E.J. Olsson (Hrsg.), *Logik in der Philosophie*, Heidelberg, 247–276.
- Schütte, Kurt 1960. *Beweistheorie*, Berlin 1960. Neufassung: *Proof Theory*, 1977.
- Smullyan, Raymond 1961. *Theory of Formal Systems*. Princeton University Press (Annals of Mathematics Studies 47).
- Tait, William W. 1967. Intensional interpretations of functionals of finite type I. *Journal of Symbolic Logic* **32**. 198–212.
- Wansing, Heinrich. 1993. *The Logic of Information Structures*, Berlin.
- . 2001. Negation. In: L. Goble (Hrsg.), *The Blackwell Guide to Philosophical Logic*, Oxford, 415–436.
- Więckowski, Bartosz. 2006. *Modality Without Reference: An Alternative Semantics for Substitutional Quantified Modal Logic and its Philosophical Significance*. Diss. Universität Tübingen.
- Zimmermann, Ernst. 2008. Strong normalisation by means of natural deduction. In: E.H. Haeusler / L.C. Pereira (Hrsg.), *Advances in Natural Deduction* (Band in Begutachtung).