Skriptum

Mathematische Logik

U. Felgner

SS 2002

Einleitung

Mathematische Logik (logica mathematica) ist eine von Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) vorgeschlagene Bezeichnung der formalen, mathematisierten Logik. Diese Form der Logik sollte aus einer universellen Wissenschaftssprache (lingua sive characteristica universalis), einem Logik-Kalkül (calculus ratiocinator) und einem Entscheidungsverfahren (ars iudicandi) bestehen. In einem Brief vom 8./18. Juli 1687 an Ph. J. Spener sprach Leibniz von seinen Erwägungen,

> „*...omnes humanas ratiocinationes ad calculum aliqvem characteristicum qvalis in Algebra combinatoriave arte et numeris habetur, revocandi, qvo non tantum certa arte inventio humana promoveri posset, sed et controversiae multae tolli, certum ab incerto distingvi, et ipsi gradus probalilitatum aestimari, dum disputantium alter alteri dicere posset: calculemus.*"
>
> „alle menschlichen Schlußfolgerungen müßten auf irgendeine mit Zeichen arbeitende Rechnungsart zurückgeführt werden, wie es sie in der Algebra und Kombinatorik und mit den Zahlen gibt, wodurch nicht nur mit einer unzweifelhaften Kunst die menschliche Erfindungsgabe gefördert werden könnte, sondern auch viele Streitigkeiten beendet werden könnten, das Sichere vom Unsicheren unterschieden und selbst die Grade der Wahrscheinlichkeiten abgeschätzt werden könnten, da ja der eine der im Disput Streitenden zum anderen sagen könnte: *Laßt uns doch nachrechnen!*"

Leibniz will also die Umgangssprachen durch vollständig formalisierte Wissenschaftssprachen ersetzen, damit sich in ihnen das Argumentieren als eine Art algebraischer Rechnung darstellen läßt. Leibniz machte zu diesem Projekt umfangreiche Vorarbeiten; aber er konnte es nicht mehr realisieren und es blieb ein schöner Traum.

Aber im 19. und 20. Jahrhundert zeigte es sich allmählich, daß manche Teile des Leibnizschen Programms realisierbar sind und andere Teile jedoch grundsätzlich nicht realisiert werden können. Diese Einsichten beziehen sich nicht auf eine universelle Wissenschaftssprache, sondern nur auf die Sprache der Mathematik.

Damit ist bereits angedeutet, daß es in dieser Vorlesung

- um die Durchführung des Leibnizschen Programms gehen soll, soweit es sich überhaupt durchführen läßt,
- und um die Grenzen der Durchführbarkeit.

Die Form der Logik, die wir in dieser Vorlesung entwickeln wollen, trägt also das Adjektiv »mathematisch« aus drei Gründen:

> erstens handelt sie nur vom logischen Schließen, so wie es in der Mathematik auftritt, und

zweitens werden die Formalismen des logischen Schließens selber mit mathematischen Methoden untersucht, und

drittens beziehen sich die betrachteten Aussagen nicht auf die sinnlich erfahrbare Umwelt, sondern auf strukturierte Mengen.

Das bedeutet, daß wir (1.) nur die extensionale, klassische zweiwertige Logik entwickeln werden und (2.) eine Formelsprache aufbauen werden, so daß sich die logischen Operationen *in der Grammatik* (!) dieser Formelsprache darstellen lassen. Das bedeutet (3.), daß wir keine Erkenntnistheorie betreiben müssen.

Ein kurzer Blick auf die Geschichte der Logik

Die 'Mathematische Logik' ist ein Teilgebiet des sehr viel umfassenderen Gebietes der 'Logik'. Diese allgemeine Wissenschaft der Logik entstand in der Antike im Umfeld der Rhetorik und der Philosophie. Ihr Begründer ist Aristoteles (384 - 322 v. u. Z.). Seine Ergebnisse hatte er in den Büchern

Topik (Τοπικὰ),
De Interpretatione (Περὶ ἑρμηνείας)
Kategorien (Κατηγορίαι),
Sophistische Widerlegungen (Περὶ σοφιστικῶν ἐλέγχων)
und den beiden Analytiken (Ἀναλυτικὰ πρότερα, Ἀναλυτικὰ ὕστερα)

dargestellt. Später wurden sie unter dem Titel 'Organon' zusammengefaßt. In der 'Ersten Analytik' stellt Aristoteles ein vollständiges System syllogistischer Schlüsse auf. Er gibt 24 Schlußweisen an, beweist ihre logische Allgemeingültigkeit und zeigt, daß es keine weiteren logisch allgemeingültigen Schlußweisen der gleichen äußeren Form gibt. Es handelt sich hier um eine frühe Meisterleistung auf dem Gebiet der Symbolischen Logik. Wir werden in §21 für die Syllogistik eine moderne Darstellung in einem mehrsortigen Logik-Kalkül geben (der einsortige Prädikatenkalkül erlaubt keine adäquate Darstellung).

In der 'Zweiten Analytik' erarbeitet Aristoteles den allgemeinen Begriff einer 'deduktiven Theorie'. Zu den Prämissen (ἀρχαί) einer Theorie gehören neben den speziellen Grundsätzen der jeweiligen Theorie (nämlich den Hypothesen, Postulaten und Definitionen) auch die logisch-allgemeingültigen Aussagen. Aristoteles nennt sie „Axiome" (ἀξιώματα) oder auch „allgemeine Meinungen" (κοιναὶ δόξαι) und gibt als Beispiel die Axiome der Gleichheit:

„Wenn $a=b$ und $b=c$, dann auch $a=c$" (76a41)

an. Aussagen, die „logisch gewiß" sind, nannte Aristoteles *„analytisch"* (ἀναλυτικός). Erst die Stoiker haben die heute übliche Bezeichnung „Logik" (λογικά) eingeführt[1]).

---

[1]) cf. Cicero, Tusc. Disp. IV (14) 33

Logik (λογικά) ist das, was den Logos (λόγος), d.h. das Sprechen, den Ausdruck der Gedanken, die Rede, angeht. Das Wort λογός ist vom Verb λέγειν (zusammenlegen, durch Worte darlegen) abgeleitet. Epistéme logiké (ἐπιστήμη λογική) ist die Wissenschaft, die vom λόγος handelt. Unser Wort „Logik" ist eine Kurzform dieser Bezeichnung. Daraus ergibt sich, daß die Logik vom Argumentieren handelt, nämlich wann eine Argumentation, d.h. eine Kette von vorgebrachten Argumenten, überzeugend ist. Logik ist das, was das Argumentieren grundsätzlich angeht, unabhängig vom jeweiligen Inhalt. Die Logik behandelt also diejenigen Argumentationen, die aufgrund ihrer Form gültig sind.

In der Zeit nach Aristoteles wurde die Logik zunächst in der Megarischen Schule [Diodoros Kronos (ca. 350 - 300 v.u.Z.), dessen Schüler Philon von Athen, et al.] und den Stoikern [Chrysippos von Soloi (ca. 281 - 208 v.u.Z.) et al.] weiterentwickelt, die zur Aristotelischen Syllogistik insbesondere eine Junktoren-Logik hinzugefügt hatten.

In der ausgehenden Antike sind Apuleius (125 bis ca. 175), Galen (129-199) und Boethius (ca. 480-524) die wichtigsten Logiker.

Zu einer erneuten Blüte kam die Logik erst wieder im Mittelalter. Die wichtigsten Logiker dieser Zeit sind Petrus Hispanus (ca. 1205-1277), Raimundus Llullus (ca.1235-1315), Walter Burläus (Burleigh, 1275-1343), Wilhelm von Ockham (ca. 1300-1350), Albert von Sachsen (ca.1316-1390) und Paulus Venetus (1370-1429).

In der Neuzeit ist zu allererst Leibniz zu nennen, der aber zur Logik nichts publiziert hatte, wohl aber in einem engen Briefkontakt mit vielen Mathematikern und Philosophen Europas stand und so seine Ideen verbreitete. Seine Notizen zur Logik wurden erst posthum veröffentlicht, z.B. von L. Couturat[1]). Einige Manuskripte hatte bereits R.E.Raspe 1765 aus dem Nachlaß Leibnizens publiziert.

Die berühmtesten Werke zur Logik aus dem 17. Jahrhundert sind:

> Joachim Jungius (1587-1657): *Logica Hamburgiensis* aus dem Jahre1638 - eine deutsche Übersetzung (von R.Meyer) erschien 1957in Hamburg;
>
> Antoine Arnauld - Pierre Nicole: *La logique ou l'art de penser.* Amsterdam 1664. Dieses Buch wird auch „Logique de Port Royal" genannt[2]).

Für das 18.Jahrhundert sind Christian Wolff (1679-1754), Johann Heinrich Lambert (1728-1777) mit seinem *„Neuen Organon"* in zwei Bänden, Leipzig

---

1) L. Couturat: *Opuscules et Fragments inédits de Leibniz* (Paris 1903, Nachdruck bei G.Olms in Hildesheim 1961)
2) eine deutsche Übersetzung erschien 1972 bei der Wissenschaftlichen Buchgesellschaft Darmstadt.

1764, Immanuel Kant (1724 - 1804) und auch der Tübinger Phillipp Gottfried Ploucquet (1716 - 1790) zu nennen.

Im 19. Jahrhundert beginnt eine stürmische Entwicklung. Es sind viele Namen zu nennen, die auch für sehr unterschiedliche Richtungen stehen. Johann Friedrich Herbart (1776 - 1741) Bernard Bolzano (1781 - 1848), Augustus de Morgan (1806 - 1871), John Stuart Mill (1806 - 1873), Rudolf Hermann Lotze (1817-1881), der Tübinger Christoph Sigwart (1830 - 1904), Ernst Schröder (1841-1902) et al. Die herausragenden Namen sind hier jedoch George Boole (1815-1864), Charles Sanders Peirce (1839 - 1914), Gottlob Frege (1848 - 1925) und Guiseppe Peano (1858 - 1932).

Für das 20. Jahrhundert wollen wir nur einige wenige Namen herausgreifen: David Hilbert (1862-1943), Bertrand Russell (1872-1970), Jan Łukasiewicz (1878-1956), Thoralf Skolem (1887-1963), Paul Bernays (1888-1977), Alfred Tarski (1902-1983), Kurt Gödel (1906-1978), Gerhard Gentzen (1909 - 1945) und Kurt Schütte (1909-1998).

— * —

Aus dieser Übersicht wird deutlich, daß in früheren Zeiten die Logik fast ausschließlich von Philosophen gepflegt wurde und daß erst vom 19. Jahrhundert an auch Mathematiker sich um die Weiterentwicklung der Logik bemüht haben. Gab es dafür Gründe?

Die Mathematiker begannen schon bald nach 1800 sich mit Logik zu beschäftigen, um den Makel loszuwerden, daß ihre Theoreme *„synthetische Urteile a priori“* wären. Das hatte Immanuel Kant (1724-1804) in seiner „Kritik der reinen Vernunft“ (1781) behauptet, nachdem er sehr gründlich die Beweise in der Arithmetik und in der Geometrie von Euklid an bis auf seine Zeit studiert hatte. In der Tat waren die Grundlagen der Mathematik bis dahin noch nie sorgfältig ausgearbeitet worden, so daß Kant mit seiner Diagnose vollkommen im Recht war.

Der böhmisch-österreichische Theologe, Mathematiker und Logiker Bernard Bolzano war wohl der Erste, der die Denkakte, die nötig sind, um eine mathematische Aussage als „wahr“ zu erkennen, analysierte und dazu in seiner 4-bändigen *„Wissenschaftslehre“*, 1837, die ersten konkreten Anstöße für die Entwicklung einer mathematischen Logik und einer mathematischen Mengenlehre gab. Aber erst 50 Jahre später war die Logik soweit ausgearbeitet, daß Gottlob Frege den Nachweis führen konnte, daß die Sätze der Arithmetik „analytische Urteile“ (in der Terminologie Kants) sind. Danach haben Guiseppe Peano, Bertrand Russell und vor allem David Hilbert (in Zusammenarbeit mit Paul Bernays, Wilhelm Ackermann, Gerhard Gentzen) den Prozeß des Beweisens in der Mathematik so weit durchleuchtet, daß alles Verifizieren in der Mathematik - im Prinzip - ausgehend von gewissen Voraussetzungen (Axiomen, Definitionen und schon bewiesenen Sätzen) als ein Herleiten im Logik-Kalkül dargestellt werden kann. Das war eine tiefliegende Erkenntnis von überragender

Bedeutung: in der Mathematik kann folglich *alle* Erkenntnisgewinnung - im Prinzip - durch rationales Argumentieren erzielt werden; auf andere Erkenntnisprozesse (wie z.B. die intellektuelle Anschauung) muß nicht zurückgegriffen werden.

— * —

Wir möchten in dieser Vorlesung über „Mathematische Logik" die zwei Gebiete, Mathematik und Logik, zusammen führen. Auch heute noch stößt man bei diesem Unternehmen auf viele Vorbehalte: die Mathematiker wollen nichts von der Logik wissen und die Logiker wollen die Methoden der Mathematik nicht verwenden. Vor etwa 150 Jahren war es nicht anders. Augustus De Morgan (1806-1871) schrieb 1868 (in einer Rezension eines Geometrie-Buches im zweiten Band der Zeitschrift „Athenaeum", pp. 71-73):

> *„Wir wissen, daß sich die Mathematiker genauso wenig um Logik kümmern, wie sich die Logiker um Mathematik kümmern. Die beiden Augen der exakten Wissenschaften sind aber Mathematik* und *Logik. Die Mathematiker sind blind auf dem logischen Auge und die Logiker sind blind auf dem mathematischen Auge. Beide glauben, mit einem Auge besser sehen zu können als mit zwei Augen."*

— * — * — * —

Literatur-Hinweise:

A) Neuere Lehrbücher:

Z.Adamowicz - P.Zbierski: *Logic of Mathematics, a modern course of classical logic.* J.Wiley & Sons, Inc., New York-Weinheim 1997.

J.L.Bell - M.Machover: *A Course in Mathematical Logic,* North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1977.

H.-D.Ebbinghaus - J.Flum - W.Thomas: *Einführung in die mathematische Logik* (4. Auflage: Spektrum Verlag, Heidelberg 1996.

H. Enderton: *A Mathematical Introduction to Logic.* (Academic Press 1972).

H. Hermes: *Einführung in die Mathematische Logik.* Teubner Verlag Stuttgart 1963.

D. Hilbert -W. Ackermann: *Grundzüge der theoretischen Logik.* Berlin 1928 (5. Auflage 1967).

Yu.I.Manin: *A course in Mathematical Logic.* Springer Verlag Berlin 1977.

E. Mendelson: *Introduction to Mathematical Logic.* Princeton 1952.

J. Donald Monk: *Mathematical Logic.* Springer Verlag Berlin 1976.

A. Prestel: *Einführung in die Mathematische Logik und Modelltheorie.* Vieweg Verlag Braunschweig 1986.

Michael M. Richter: *Logikkalküle.* Teubner-Verlag Stuttgart 1978.

J. R. Shoenfield: *Mathematical Logic* (Addison Wesley 1967)

R. M. Smullyan: *Fundamentals of Logic.* Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs 1962.

R. M. Smullyan: *First-Order Logic.* Springer Verlag Berlin 1968.

B) Zur Geschichte der Logik:

J. M. Bochenski: *Formale Logik,* Freiburg 1956.

Marcel Guillaume: *Axiomatik und Logik.* pp.748 - 881 in: J.Dieudonné: Geschichte der Mathematik 1700-1900. Vieweg Verlag Braunschweig 1985.

Frank-Peter Hansen: *Geschichte der Logik des 19. Jahrhunderts.* Verlag Königshausen & Neumann, Würzburg 2000.

Martha und William Kneale: *The development of Logic.* Oxford 1962.

Wilhelm Risse: *Die Logik der Neuzeit (1500-1640),* 2 Bände, Stuttgart 1964.

Carl Prantl: *Geschichte der Logik im Abendlande.* Leipzig 1855-1870. Nachdruck bei der Wiss. Buchges. Darmstadt 1998.

C) Andere Logik-Systeme

Brian F.Chellas: *Modal logic.* Cambridge Univ. Press 1980.

L. Kreiser, S. Gottwald, W. Stelzner (Herausgeber): *Nichtklassische Logik.* Akademie Verlag Berlin 1990.

Kurt Schütte: *Vollständige Systeme modaler und intuitionistischer Logik.* Springer Verlag Berlin 1968.

D) Handbücher und Lexika

N.I. Kondakow: *Wörterbuch der Logik* (Berlin 1978).

Denis Diderot & Jean-le-Rond d'Alembert: *Encyclopédie Méthodique,* nouvelle édition (dédiée à la sérénissime République de Venise): *Logique et Métaphysique,* Padua 1786-1788, 3 Bände.

Handbook of Mathematical Logic (J.Barwise, Herausgeber), North-Holland Publ. Company, Amsterdam 1977.

Handbook of Philosophical Logic (D.Gabbay und F.Günthner, Herausgeber), 4 Bände (D.Reidel Publ. Company, Dordrecht 1983-1989). Band 1: Elementary classical logic (1983), Band 2: Extensions of classical logic (1984), Band 3: Alternatives in classical logic (1986), Band 4: Topics in the Philosophy of language (1989).

Handbook of Logic in Computer Science (S.Abramsky & Dov Gabbay & T.S.E.Maibaum, Herausgeber). Clarendon Press Oxford 1992. Band 1: Background: Math.Structures, Band 2: Computational Structures, Band 3: Semantic Structures, Band 4: Semantic modelling, Band 5: Theoretical methods in specification and verification, Band 6: Logical methods in computer science.

E) Bibliographien:

Ω-Bibliography of Mathematical Logic, 6 Bände, Springer Verlag Berlin 1987, Herausgegeben von G.H.Müller. Band 1: *Classical Logic,* Band 2: *Non-Classical Logic,* Band 3: *Model-Theory,* Band 4: *Recursion Theory,* Band 5: *Set Theory,* Band 6: *Proof-Theory.*

Wilhelm Risse: *Bibliographica Logica 1472 - 1800.* In vier Bänden, Olms-Verlag Hildesheim 1965-1979.

KAPITEL I:

Junktoren-Logik

Einzelne Aussagen $\Phi, \Psi, \Gamma, \ldots$ können durch Junktoren (wie z.B. 'und', 'oder',...) zu neuen Aussagen verknüpft werden, beispielsweise: *Φ und Ψ*, etc. und derartige Verknüpfungen können wiederum mit anderen Aussagen verknüpft werden, beispielsweise: *Wenn (Φ und Ψ), dann (Ψ oder Γ)*, etc. Wir wollen in diesem Kapitel herausfinden, in welcher Weise die Wahrheitswerte der Verküpfungen von den Wahrheitswerten der einzelnen Aussagen abhängen.

Das Wort 'Junktor' spielt an das lateinische Verb *jungere* (verbinden, verknüpfen) an. Ein Junktor ist ein Operator, der einzelne Aussagen zu einer neuen Aussage verbindet.

Die Junktoren-Logik wird auch Aussagenlogik genannt. Sie beginnt in der Megarischen Schule (Diodoros Kronos, Philon von Athen, et al.) im ausgehenden dritten Jahrhundert vor unserer Zeitrechnung und wird schon bald danach von den Stoikern (Chrysippos von Soloi (ca. 281 - 208 v.u.Z.) et al.) weiterentwickelt. Eine Diskussion des damals Erreichten findet man bei Diogenes Laërtius (im 7.Buch seines Werkes über die *„Leben und Meinungen berühmter Philosophen“*) und bei Sextus Empiricus (*Adversus mathematicos*, sowie *Pyrrhoniae hypotyposeis*).

Wir legen unserer Darstellung der Junktoren-Logik den Wahrheitsbegriff zugrunde. Auf die Pilatus-Frage „Was ist Wahrheit?“ werden wir allerdings nicht eingehen. Ausgehend vom Wahrheitsbegriff, der also nicht analysiert wird, geben wir (in §1) zunächst eine Übersicht über alle (extensionalen) Junktoren und prüfen (in §3), welche Junktoren sich mit anderen Junktoren ausdrücken lassen. Wir werden beweisen, daß man beispielsweise mit den beiden Junktoren „nicht“ und „impliziert“ sämtliche Junktoren (beliebiger Stellenzahl) ausdrücken kann. In §4 behandeln wir Tautologien, d.h. „logisch wahre Formeln“ und stellen in §5 theoretische Überlegungen über den Folgerungs-Begriff an. In §6 stellen wir dem Folgerungs-Begriff den Begriff der Herleitung (Deduktion) zur Seite und zeigen in §7, daß beide Begriffe gleichwertig sind.

§1. *Die Wahrheitstafeln der Junktoren*

Es geht uns in diesem ersten Abschnitt um Probleme der folgenden Art:

> Es seien Φ_1, Φ_2,..., Φ_n irgendwelche Aussagen und $A(\Phi_1, \Phi_2,..., \Phi_n)$ irgendeine Verknüpfung dieser Aussagen zu einer neuen Aussage.
>
> **Frage:** Wenn man die Aussagen $\Phi_1, \Phi_2,..., \Phi_n$ alle bejaht, muß man dann auch $A(\Phi_1, \Phi_2,..., \Phi_n)$ bejahen?

Mit anderen Worten: wenn man die Aussagen Φ_1, Φ_2,..., Φ_n als „wahr" anerkennt, muß man dann auch $A(\Phi_1, \Phi_2,..., \Phi_n)$ als „wahr" anerkennen?

Es geht dabei um die Frage, ob wir $A(\Phi_1, \Phi_2,..., \Phi_n)$ aus *logischen Gründen* als „wahr" anerkennen müssen. Die Zustimmung zu $A(\Phi_1,\Phi_2,...,\Phi_n)$ soll also nicht vom Inhalt, der in den einzelnen Aussagen Φ_1, Φ_2,..., Φ_n zum Ausdruck kommt, abhängen, sondern nur von der äußeren Form der Verknüpfung. - Und wenn einige der vorgegebenen Aussagen Φ_1, Φ_2,..., Φ_n falsch sind, kann man dann immer noch $A(\Phi_1, \Phi_2,..., \Phi_n)$ zustimmen, oder muß man $A(\Phi_1, \Phi_2,..., \Phi_n)$ ablehnen?

Wir müssen also davon ausgehen, daß jede einzelne Aussage Φ_i entweder „wahr" oder „falsch" sein kann. Daher legen wir unseren Untersuchungen immer die folgende allgemeine Hypothese zu Grunde, *daß jede vorkommende Aussage entweder „wahr" oder „falsch" ist.* Da wir später mit diesen Wahrheitswerten „rechnen" wollen, ist es bequem, die folgende Verabredung zu treffen:

1 steht für *„ist wahr"*, und
0 steht für *„ist falsch"*.

Bereits Aristoteles hatte empfohlen, dem Aufbau der Logik (allgemeiner: dem Aufbau einer jeden deduktiven Theorie) die Hypothese zugrunde zu legen, daß alle betrachteten Aussagen entweder „wahr" oder „falsch" seien (vergl. Aristoteles, *Zweite Analytik* I,71a14, und *De Interpretatione* IV, 17a5, sowie *Metaphysik,* Buch IV(Γ), Abschnitt VII, 1011b23). Deshalb nennt man Aussagen, die entweder wahr oder falsch sind, *aristotelische Aussagen.* Die Logik, die wir im Folgenden aufbauen werden, setzt also explizit voraus, daß alle betrachteten Aussagen aristotelisch sind. Auf Wissenschaften, in denen man nicht voraussetzen kann, daß jede vorkommende Aussage aristotelisch sei, kann man die hier entwickelte Logik demnach nicht anwenden. Ob man in der

Mathematik davon ausgehen darf, daß alle dort vorkommenden Aussagen aristotelisch seien, ist ein altes Problem, das seit mindestens hundert Jahren kontrovers diskutiert wird. In der klassischen Mathematik geht man jedoch von einer positiven Antwort aus.

Definition. Mit val(Φ) bezeichnen wir den Wahrheitswert der Aussage Φ. Es ist also stets entweder val(Φ) = 0 oder val(Φ) = 1. Dabei steht *val* für das lateinische *valentia* (= der Wert, die Stärke), oder das Französiche *valeur,* oder das Englische *value.*

Definition. Sei n eine natürliche Zahl. Eine Operation **J**, die n Aussagen Φ_1, $\Phi_2,\ldots, \Phi_n$ zu einer neuen Aussage $\mathbf{J}(\Phi_1, \Phi_2,\ldots, \Phi_n)$ verbindet, wird *n-stelliger Junktor* genannt. Wir nennen $\Phi_1,\ldots, \Phi_n$ die *Komponenten* von $\mathbf{J}(\Phi_1,\ldots, \Phi_n)$.

Wir werden nur solche n-stelligen Junktoren **J** betrachten, für die $\mathbf{J}(\Phi_1,\ldots, \Phi_n)$ aristotelisch ist, sofern die Komponenten $\Phi_1, \Phi_2,\ldots, \Phi_n$ alle aristotelisch sind. Die eingangs geführte Diskussion legt es nahe, nur extensionale Junktoren zuzulassen.

Definition. Ein n-stelliger Junktor **J** heißt *extensional,* wenn der Wahrheitswert von $\mathbf{J}(\Phi_1, \Phi_2,\ldots, \Phi_n)$ nur von den Wahrheitswerten der Komponenten Φ_1, $\Phi_2,\ldots, \Phi_n$ abhängt.

Sind die Junktoren *'und', 'oder', 'impliziert', 'nicht',* etc., die die Umgangssprache hat, extensional? Wir diskutieren einige Beispiele.

Die Negation *'nicht':* Wenn man die extensionale Auffassung zugrunde legt, dann ist die Negation einer wahren Aussage eine falsche Aussage und die Negation einer falschen Aussage eine wahre Aussage. Mit anderen 'Worten': val(*nicht* Φ) = 1 – val(Φ). Dann wäre eine zweifach negierte Aussage ebenso wahr wie die Aussage selbst. In der Umgangssprache wird die doppelte Negation gelegentlich aber etwas anders behandelt. Wenn man beispielsweise sagt, daß jemand nicht unfreundlich ist, dann wird damit nicht gesagt, daß die Person freundlich sei. Auch wenn man sagt, daß etwas nicht falsch sei, dann meint man umgangssprachlich damit nicht immer, daß es vollkommen richtig sei.

In Dialekten besagt die zweifache Negation oft soviel wie die einfache Negation, beispielsweise:

„weil ich noch niemal bei keiner Schlägerei gewesen"
J.Chr.Grimmelshausen: Simplicius Simplicissimus

„Was zu einem Esel geboren ist, das wird sein Tag nicht kein Pferd"
Th.Storm: Carsten Kurator

Manchmal findet man auch dreifache Negationen, die soviel wie eine einfache Negation besagen:

„Aber das seien so die verdammten Verbesserungen, die bei Lichte besehen, nie keine nicht wären" Theodor Fontane: Quitt.

Diese Diskussion macht uns deutlich, daß sowohl in Dialekten als auch in kultivierten Umgangssprachen, die Negation manchmal ein wenig unsystematisch gebraucht wird. Ein solcher unsystematischer Gebrauch kann aber nicht zur Grundlage der Logik dienen. Wir werden uns daher wie folgt festlegen:

Definition. Die *Verneinung* einer Aussage Φ wird mit *nicht* Φ (oder auch mit *non-*Φ) bezeichnet und so gebraucht, daß

$$\mathrm{val}(\mathit{nicht}\ \Phi) = 1 - \mathrm{val}(\Phi)$$

gilt. Statt *nicht* Φ schreiben wir auch symbolisch $\neg\Phi$.

Das Zeichen $\neg$ soll an das übliche Zeichen für die Subtraktion (den „Minus"-Strich) erinnern [Die Negation wurde erstmals von J.A.von Segner (*Specimen logicae universaliter demonstrata,* Jena 1740) mit einem Minus-Strich bezeichnet]. Die Ergänzung um den kleinen senkrechten Strich ist eine Anspielung an die Notation von Gottlob Frege (*„Begriffsschrift"*, 1879) und von Ernst Schröder (*„Algebra der Logik"*, Band 1, Leipzig 1890, Seite 301). Es gilt also

$$\mathrm{val}(\neg\Phi) = 1 - \mathrm{val}(\Phi),$$

und daraus folgt, daß eine zweifach negierte Aussage den selben Wahrheitswert hat, wie die Aussage selber (**duplex negatio affirmat**):

$$\mathrm{val}(\neg\neg\Phi) = \mathrm{val}(\Phi).$$

„Zum öftern pflegt ein doppelt Nein // Ein Ja ganz zierlich auszumachen,"
Aus dem Gedicht „Ja und Nein" von Friedrich von Hagedorn (1708-1754).

Badinerie: Aus dem Gesetz $\mathrm{val}(\neg\neg\Phi) = \mathrm{val}(\Phi)$ ergibt sich natürlich auch: $\mathrm{val}(\neg\neg\neg\neg\Phi) = \mathrm{val}(\Phi)$. Das weiß auch der Clown in Shakespeares Kommödie *'Twelfth night,* or *What you will',* wenn er sagt:

„four negatives make you two affirmatives".

Der Clown sagt dies mit einem leisen Spott und parodiert vermutlich Lukian, der im 'Traum des Mikyllos' den Sophisten Thesmopolis verspottet, der ihm während eines Gastmahls vordoziert, daß aus zwei Verneinungen eine Bejahung würde. Shakespeare's Clown ist offenbar doppelt so schlau wie Lukians Sophist.

Die Konjunktion *'und':* In der Umgangssprache ist der Gebrauch des Wortes 'und' nicht einheitlich. Wenn man beispielsweise 'dumm und schön' sagt, so meint man damit, daß irgendeine Person beide Eigenschaften hat. In der Redewendung 'männlich und weiblich' wird dagegen nicht ausgesagt, daß irgendeine Person beide Eigenschaften zugleich hätte. Wir stellen fest, daß das Wörtchen 'und' manchmal im konjunktiven Sinne und manchmal aufzählend im adjunktiven Sinne gebraucht wird. Das Wörtchen 'und' wird also in der Umgangssprache nicht einheitlich verwendet. Wir werden uns daher festlegen müssen und definieren:

Definition. Mit dem Wörtchen *'und'* bezeichnen wir die *Konjunktion* zweier Aussagen. Wir symbolisieren die Konjunktion mit dem Zeichen $\wedge$. Demnach ist $\Phi \wedge \Psi$ zu lesen als 'Φ und Ψ'. Wir gebrauchen die Konjunktion so, daß gilt:

$$\mathrm{val}(\Phi \wedge \Psi) = \mathrm{val}(\Phi)\bullet\mathrm{val}(\Psi).$$

Die Disjunktion *'oder':* Umgangssprachlich wird das Wörtchen 'oder' sowohl im ausschließenden Sinne als auch im nicht-ausschließenden Sinne gebraucht. Wir müssen uns wieder festlegen und definieren:

Definition. Den Junktor *'oder'* werden wir im nicht-ausschließenden Sinne gebrauchen. Wir bezeichnen ihn als *Disjunktion* und symbolisieren ihn (in Anspielung an das Lateinische „vel") mit dem Zeichen $\vee$. Demnach ist $\Phi \vee \Psi$ zu lesen als 'Φ oder Ψ'. Die Disjunktion ist also wie folgt festgelegt:

$$\mathrm{val}(\Phi \vee \Psi) = \mathrm{Max}\{\mathrm{val}(\Phi), \mathrm{val}(\Psi)\},$$

wobei mit $\mathrm{Max}\{\mathrm{val}(\Phi), \mathrm{val}(\Psi)\}$ die größte der beiden Zahlen $\mathrm{val}(\Phi)$, $\mathrm{val}(\Psi)$ bezeichnet wird (also das Maximum von $\{\mathrm{val}(\Phi), \mathrm{val}(\Psi)\}$).

Die Implikation. Wenn man sagt, daß eine Aussage Φ eine andere Aussage Ψ *impliziert,* dann meint man damit im allgemeinen, daß der in Ψ ausgedrückte Inhalt sich aus dem in Φ ausgedrückten Inhalt ergibt, oder mit anderen Worten, daß Ψ aus Φ heraus entwickelt werden kann. In einer extensionalen Logik kann man aber nicht von diesem Verständnis der Implikation ausgehen. Wir müssen von einer wahrheitsfunktionalen Deutung ausgehen. Es ist bemerkenswert, daß bereits in der Antike eine solche Deutung von dem Megariker Philon von Athen vertreten wurde (vergl. Sextus Empiricus

'Gegen die Mathematiker', Buch III,16-17). Wir folgen diesem Vorschlag und definieren:

Definition. Die Implikation *'wenn Φ, dann Ψ'* ist nur dann falsch, wenn Φ wahr und Ψ falsch ist. In allen anderen Fällen ist sie immer wahr. Statt *'wenn Φ, dann Ψ'* werden wir kürzer $\Phi \rightarrow \Psi$ schreiben. Es ist damit:

$$\mathrm{val}(\Phi \rightarrow \Psi) = \mathrm{Max}\{\, 1 - \mathrm{val}(\Phi), \mathrm{val}(\Psi)\} .$$

Wir nennen den so definierten Junktor '$\rightarrow$' die *Philonische Implikation.*

Gibt es weitere Junktoren? Die Umgangssprache hat noch viele andere Junktoren: 'sowie', 'nebst', 'während', 'folglich', etc. Aber davon sind 'sowie' und 'nebst' nur stilistische Varianten von 'und'. Wenn wir nach weiteren Junktoren suchen, dann sollten wir kein Wörterbuch durchsuchen, sondern prüfen, ob es neben den bereits diskutierten 0,1-wertigen Funktionen $\mathrm{val}(\neg\Phi)$, $\mathrm{val}(\Phi \wedge \Psi)$, $\mathrm{val}(\Phi \vee \Psi)$ und $\mathrm{val}(\Phi \rightarrow \Psi)$ noch andere 0,1-wertige Funktionen gibt, und ob diese Funktionen die wahrheitsfunktionalen Beschreibungen von Junktoren sind.

Übersicht über alle 1-stelligen (monadischen), und 2-stelligen (dyadischen) extensionalen Junktoren

Da extensionale Junktoren durch ihren Wertverlauf eindeutig bestimmt sind, werden wir sie in der Form von Tabellen mitteilen. Im Falle eines n-stelligen Junktors **J** ist die Tabelle wie folgt aufgebaut:

Φ_1	Φ_2	•••	Φ_n	$\mathbf{J}(\Phi_1, \Phi_2,..., \Phi_n)$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$\mathrm{val}(\Phi_1)$	$\mathrm{val}(\Phi_2)$	•••	$\mathrm{val}(\Phi_n)$	$\mathrm{val}(\mathbf{J}(\Phi_1, \Phi_2,..., \Phi_n))$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

In jeder Zeile unterhalb des waagerechten Striches steht eine mögliche Wahrheitswertverteilung der Komponenten $\Phi_1,..., \Phi_n$ und rechts daneben hinter dem Doppelstrich der davon abhängige Wahrheitswert von $\mathbf{J}(\Phi_1, \Phi_2,..., \Phi_n)$.

Diese Tabellen-Schreibweise geht auf Ch.S. Peirce[1]) 1902, Emil L. Post[2]) 1921 und Ludwig Wittgenstein[3]) 1918 zurück.

Man kann einen Junktor **J** auch dadurch mitteilen, daß man ein Polynom $f_J(x_1,...,x_n)$ mit der Eigenschaft

$$\mathrm{val}(J(\Phi_1, \Phi_2,..., \Phi_n)) = f_J(\mathrm{val}(\Phi_1),...,\mathrm{val}(\Phi_n))$$

angibt. Derartige Beschreibungen hat zuerst George Boole (1847) gegeben.

Die 1-stelligen Junktoren

Offenbar gibt es $2^2 = 4$ verschiedene geordnete Paare aus Nullen und Einsen. Daher kann es auch nur 4 verschiedene extensionale einstellige Junktoren geben. In der nachfolgenden Tabelle geben wir sie alle in lexikographischer Anordnung an. Wir fragen uns, welche davon in der Umgangssprache vorkommen.

Φ	das Falsum	Affirmation von Φ	$\neg\Phi$	das Verum
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

(1) Der Junktor, der durch die erste Spalte $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ gegeben ist, kommt in den Umgangssprachen nicht vor. Wenn man ihn auf eine Aussage anwendet, entsteht immer eine falsche Aussage. Wir wollen ihn das **falsum** (das **Falsche**) nennen.

(4) Der Junktor, der in der vierten Spalte (hinter dem Doppelstrich) angegeben ist, ist komplementär zur ersten Spalte und wird **Verum** (das Wahre) genannt. Diesen Junktor bezeichnen wir mit einem geschwungenen $\curlyvee$. Den dazu komplementären Junktor „falsum" werden wir daher mit $\curlywedge$ bezeichnen.

(2) Der Junktor, der in der zweiten Spalte (hinter dem Doppelstrich) aufgeführt ist, könnte „die **Bestätigung**" (oder **Affirmation**) genannt werden. Er ist in der extensionalen Logik offenbar entbehrlich und deshalb führen wir auch kein Zeichen für ihn ein.

---

[1]) Ch.S. Peirce: Collected Papers, Band IV: „Minute Logic", p. 213.
[2]) E.L. Post: *Introduction to a general theory of elementary propositions* (American Journal of Math. 43(1921), pp.163-185.
[3]) L. Wittgenstein*Tractatus Logico-Philosophicus* (geschrieben 1918, Erstdruck 1921), Ziffer 4.31 und 5.101.

(3) In der dritten Spalte ist ein Junktor definiert, den wir bereits als **Negation** kennen gelernt haben. Wir hatten für ihn das Zeichen $\neg$ eingeführt (gelesen: *„nicht"*, oder auch lateinisch: *„non"*). Es gilt

$$\mathrm{val}(\neg\Phi) = 1 - \mathrm{val}(\Phi).$$

Die 2-stelligen Junktoren

Um uns dem üblichen Sprachgebrauch anzuschließen, werden wir zweistellige Junktoren **J** auch zwischen die beiden Komponenten schreiben, also auch $\Phi\,\mathbf{J}\,\Psi$ statt $\mathbf{J}(\Phi,\Psi)$ schreiben.

Offenbar gibt es $2^4=16$ verschiedene Quadrupel aus Nullen und Einsen. Daher kann es auch nur 16 verschiedene extensionale zweistellige Junktoren geben. In der nachfolgenden Tabelle geben wir sie alle in lexikographischer Anordnung an. Wir fragen uns, welche davon in der Umgangssprache vorkommen.

Φ	Ψ	$\Phi \curlywedge \Psi$	$\Phi \wedge \Psi$	$\Phi \succ\!\!- \Psi$	$\Phi \circ\!- \Psi$	$\Phi -\!\!\prec \Psi$	$\Phi -\!\circ \Psi$	$\Phi \succ\!\!-\!\!\prec \Psi$	$\Phi \vee \Psi$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Φ	Ψ	$\Phi \downarrow \Psi$	$\Phi \leftrightarrow \Psi$	$\Phi \rightarrow\!| \Psi$	$\Phi \leftarrow \Psi$	$\Phi |\!\!\leftarrow \Psi$	$\Phi \rightarrow \Psi$	$\Phi | \Psi$	$\Phi \curlyvee \Psi$
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

(1) Das **Falsum** hatten wir schon unter den 1-stelligen Junktoren kennengelernt. Wir werden ihn wieder mit dem Zeichen $\curlywedge$ symbolisieren. Für alle Aussagen Φ und Ψ ist stets $\mathrm{val}(\Phi \curlywedge \Psi) = 0$

(2) Den Junktor, der in der zweiten Spalte (hinter dem Doppelstrich) steht, hatten wir schon als **<u>Konjunktion</u>** kennen gelernt und mit dem Zeichen $\wedge$

(oder gelegentlich auch mit &, dem stilisierten „et") bezeichnet. Es ist $\mathrm{val}(\Phi \wedge \Psi) = \mathrm{val}(\Phi)\cdot\mathrm{val}(\Psi)$.

(3) Der Junktor in der dritten Spalte kann als „*Φ statt Ψ*" gelesen werden. Es wird der erste Ausdruck behauptet und der zweite verworfen. Man nennt ihn daher **Postsektion** ('sectio' ist im Lateinischen „das Wegschneiden" und 'postsectio' das „Wegschneiden des Nachfolgenden"). Seine Wahrheitswert-Tafel ist „komplementär" zur Wahrheitswert-Tafel der Implikation „$\rightarrow$", die sich in der Spalte 14 findet. Wir bezeichnen ihn mit einem ähnlichen Symbol: $\succ\!\!-$. Es ist $\mathrm{val}(\Phi \succ\!\!- \Psi) = \mathrm{val}(\Phi)\cdot\mathrm{val}(\neg\Psi)$.

(4) Der Junktor in der vierten Spalte kann als „*von Φ und Ψ jedenfalls Φ*" gelesen werden. Wir bezeichnen ihn mit einem liegenden, nach links geneigten P, also etwa $\circ\!\!-$. Es gilt dann $\mathrm{val}(\Phi \circ\!\!- \Psi) = \mathrm{val}(\Phi)$. Daher nennt man diesen Junktor auch **Präpendenz.** Das bedeutet „Abhängigkeit von der ersten Aussage". Das Wort ist gebildet aus der Präposition 'prae' (= voran), und dem Verb 'pendēre' (=hängen, von etwas abhängen).

Wenn ein Gauner mit vorgehaltener Pistole „Geld oder Leben" fordert, dann meint er eigentlich nicht die Disjunktion „oder", sondern schlichtweg die Präpendenz. Er will in jedem Fall an das Geld seines Opfers kommen: entweder das Opfer gibt es freiwillig heraus und rettet sein Leben, oder er erschießt es und nimmt sich danach das Geld.

(5) Der Junktor in der fünften Spalte kann als „*nicht Φ sondern Ψ*" gelesen werden und daher als **Präsektion** bezeichnet werden (in Zeichen: $\Phi -\!\!\prec \Psi$). Im Lateinischen wird er „non ... sed ..." gelesen. Berühmt ist Senecas Ausspruch: „non vitae sed scholae discimus" (106. Brief an Lucilius). Das ist kein Druckfehler! So steht es bei Seneca. Es ist $\mathrm{val}(\Phi -\!\!\prec \Psi) = \mathrm{val}(\neg\Phi)\cdot\mathrm{val}(\Psi)$.

(6) Der Junktor in der sechsten Spalte wird **Postpendenz** genannt und kann mit „*von Φ und Ψ jedenfalls Ψ*" umschrieben werden. Wir verwenden für ihn das Zeichen $-\!\!\circ$ (ein liegendes, rechts geneigtes P). Es ist $\mathrm{val}(\Phi -\!\!\circ \Psi) = \mathrm{val}(\Psi)$.

(7) Der Junktor der siebten Spalte wird **Kontravalenz** oder **Alternative** genannt und kann als „*entweder Φ oder Ψ*" gelesen werden. Seine Wahrheitswert-Tafel ist komplementär zur Bi-Implikation „$\leftrightarrow$" aus Spalte 10 und daher symbolisieren wir die Kontravalenz mit dem modifizierten Zeichen $\succ\!\!\prec$.

$$\mathrm{val}(\Phi \succ\!\!\prec \Psi) = \mathrm{val}(\Phi)\bullet(1 - \mathrm{val}(\Psi)) + \mathrm{val}(\Psi)\bullet(1 - \mathrm{val}(\Phi)).$$

(8) Diesen Junktor der achten Spalte hatten wir schon als **Disjunktion** kennen gelernt. Er wird „*Φ oder Ψ*" gelesen, wobei das „oder" im nicht-ausschließlichen Sinne gemeint ist.

$$\mathrm{val}(\Phi \vee \Psi) = \mathrm{val}(\Phi) + \mathrm{val}(\Psi) - \mathrm{val}(\Phi)\bullet\mathrm{val}(\Psi).$$

(9) Der Junktor in der neunten Spalte kann als *„weder Φ noch Ψ"* gelesen werden und wird daher **Verwerfung** (oder **Rejektion**, englisch: joint denial) genannt. Seine Bedeutung wurde erst von Charles Sanders Peirce 1902 (und dann nocheinmal 1920 von Jean G.P.Nicod) erkannt. Wir werden darauf in §3 eingehen. Peirce hatte ihn mit dem kunstvollen Symbol ⅄ bezeichnet, das er 'ampheck' (in Anspielung an das griechische ἀμφηκής=die zweiseitige, zweischneidige Sichel) nannte (siehe Peirce, Collected Papers Band IV, p.215-216). Heute ist das typographisch ähnliche Zeichen ↓ üblich geworden. Man nennt diesen Junktor daher auch den 'Peirceschen Pfeil' oder auch die Nicodsche Funktion. Es ist

$$\mathrm{val}(\Phi \downarrow \Psi) = \mathrm{val}(\neg\Phi)\bullet\mathrm{val}(\neg\Psi) = (1-\mathrm{val}(\Phi))\bullet(1-\mathrm{val}(\Psi)).$$

(10) Der Junktor in der zehnten Spalte kann *„Φ genau dann wenn Ψ"* gelesen werden und wird daher **Äquivalenz** oder auch **Bi-Implikation** genannt. Wir bezeichnen diesen Junktor wie üblich mit einem Doppel-Pfeil $\leftrightarrow$.

$$\mathrm{val}(\Phi \leftrightarrow \Psi) = 1-\mathrm{val}(\Phi)-\mathrm{val}(\Psi) + 2\bullet\mathrm{val}(\Psi)\bullet\mathrm{val}(\Phi) \ .$$

(11) Der Funktor in der elften Spalte kann mit *„von Φ und Ψ keinsfalls Ψ"* umschrieben werden und wird daher **Postnonpendenz** genannt. Wir bezeichnen diesen Junktor mit dem Symbol $\to\!\mid$, in den das Negations-Zeichen (und ein seitenverkehrtes „K") eingearbeitet ist. Es ist $\mathrm{val}(\Phi \to\!\mid \Psi) = \mathrm{val}(\neg\Psi)$.

(12) In dieser zwölften Spalte steht die **Replikation** *„Φ falls Ψ"*, also der zur Implikation konverse Junktor. Wir verwenden für ihn den rückwärts gerichteten Pfeil $\leftarrow$. Man kann die Replikation $\Phi \leftarrow \Psi$ auch wie folgt lesen: „ohne Φ kein Ψ", oder auch „Φ ist c o n d i t i o s i n e q u a n o n für das Bestehen von Ψ". Es ist $\mathrm{val}(\Phi \leftarrow \Psi) = \mathrm{val}(\Psi \to \Phi)$.

(13) Der Junktor in der 13. Spalte kann mit *„von Φ und Ψ keinsfalls Φ"* umschrieben werden und wird daher **Pränonpendenz** genannt. Wir bezeichnen diesen Junktor mit dem Symbol $\mid\!\leftarrow$, in das ein „K" (für „keinesfalls") eingearbeitet ist. Es ist $\mathrm{val}(\Phi \mid\!\leftarrow \Psi) = \mathrm{val}(\neg\Phi)$.

(14) In dieser 14. Spalte steht der Junktor, den wir schon als **Implikation** kennen gelernt hatten und *„aus Φ folgt Ψ"* (oder *„wenn Φ, dann Ψ"*, oder auch *„Φ impliziert Ψ"*) gelesen wird. Wir symbolisieren ihn wie üblich durch den nach rechts gerichteten Pfeil $\to$. Es ist

$$\mathrm{val}(\Phi \to \Psi) = 1-\mathrm{val}(\Phi)+\mathrm{val}(\Phi)\bullet\mathrm{val}(\Psi) \ ,$$

oder mit anderen 'Worten':

$$\mathrm{val}(\Phi \to \Psi) = 1 \quad \text{genau dann wenn} \quad \mathrm{val}(\Phi) \leq \mathrm{val}(\Psi).$$

Für Aussagen Φ mit $\mathrm{val}(\Phi) = 0$ ist also für jede beliebige Aussage Ψ stets $\mathrm{val}(\Phi \to \Psi) = 1$. In der Scholastik hatte man diesen Sachverhalt mit den Worten *ex falso quodlibet* umschrieben.

(15) Der Junktor in der 15. Spalte hat in keiner europäischen Sprache einen direkten Ausdruck. Man kann ihn nur umständlich umschreiben, etwa wie folgt: *„von Φ und Ψ höchstens eine von beiden"*. Er wird **Exklusion** (im Englischen auch 'alternative denial') genannt. Seine Bedeutung wurde erst von Henry Maurice Sheffer 1913 erkannt (*A set of five independent postulates for Boolean Algebras, with application to logical constants,* Transact. Amer. Math. Soc. Band 14 (1913), pp.481-488). Man nennt diesen Junktor daher auch 'Sheffer-Strich'. Über ihn werden wir in §3 berichten. Es ist $\mathrm{val}(\Phi \mid \Psi) = 1 - \mathrm{val}(\Phi \wedge \Psi)$.

(16) Das **Verum** hatten wir schon unter den 1-stelligen Junktoren kennengelernt. Wir werden es wieder mit einem Υ symbolisieren. Für alle Aussagen Φ und Ψ ist stets $\mathrm{val}(\Phi \Upsilon \Psi) = 1$.

Damit haben wir alle 16 Junktoren besprochen. Nur fünf davon sind uns in der Umgangssprache wohlvertraut (Konjunktion $\wedge$, Disjunktion $\vee$, Alternative $\succ\!\!\prec$, Implikation $\rightarrow$ und Äquivalenz $\leftrightarrow$). Einige lassen sich immerhin noch ganz gut in der Umgangssprache wiedergeben. Aber es ist höchst bemerkenswert, daß wir auch auf einige Junktoren gestoßen sind, die in den Umgangssprachen überhaupt nicht präsent sind. Müssen wir uns mit all diesen Junktoren vertraut machen? Müssen wir auch den Gebrauch der 3-stelligen Junktoren, der 4-stelligen Junktoren etc. lernen? Dieser Frage werden wir uns in §3 widmen. Zur Vorbereitung dient uns der folgende §2.

Literatur

George Boole: *The mathematical analysis of logic.* Cambridge 1847.

Karl Döhmann: *Die sprachliche Darstellung der Aussagen-logischen Funtoren.* Logique et Analyse 2e Année 1959, Heft 6-7, pp.68-98.

Jan Łukasiewicz: *Zur Geschichte der Aussagenlogik.* In: Erkenntnis, Band 5 (1935), pp.111-131.

Sextus Empiricus: *Adversus Mathematicos* (Πρὸς μαθηματικούς, in 6 Büchern) und *Adversus Dogmaticos* (Πρὸς δογματικούς, in 5 Büchern. Die ersten beiden Bücher sind der Logik gewidmet: Πρὸς λογικούς).

Übungsaufgaben zu §1

(1) Welcher Junktor ist gemeint, wenn man sagt:
  (i) Φ ist *hinreichende* Bedingung für die Gültigkeit von Ψ?
  (ii) Φ ist *notwendige* Bedingung für die Gültigkeit von Ψ?

(2) Thomas Mann schreibt in seiner Erzählung „Wälsungenblut" über ein Gespräch am Mittagstisch: *„Das Gespräch ... zog dann Kreise um eine Frage rein logischer Natur, die beiläufig von Kunz aufgeworfen war: ob nämlich, wenn Φ die notwendige und hinreichende Bedingung für Ψ sei, auch Ψ die notwendige und hinreichende Bedingung für Φ sein müssen."* Thomas Mann schildert, wie man sich darüber erhitzt hatte, bis der Hausherr sich anheischig machte, das Ganze zu erklären. *„Er erlitt ein vollkommenes Fiasko. Die Kinder lachten ihn aus. Sogar seine Frau wies ihn zurück, ..."* etc.
- Können Sie die aufgeworfene Frage klären?

(3) Wieviele extensionale n-stellige Junktoren gibt es?

(4) Geben Sie für die folgenden dreistelligen Junktionen die passenden Wahrheitswert-Tafeln an:
  (i) „(Φ und Ψ) oder Θ",
  (ii) „wenn (Φ oder Ψ) dann Ψ".
  (iii) „entweder Φ oder Ψ oder Θ" (d.h. genau eine der drei Aussagen Φ, Ψ, Θ ist wahr) ".

(5) (Nach J.E. Littlewood) Drei bärtige Herren A,B,C sitzen beim gemeinsamen Frühstück. Bei allen dreien klebt sehr bald etwas Eigelb im Bart (sie können das nicht bei sich selbst bemerken, wohl aber bei den Kollegen, die ihnen gegenüber sitzen). Auf einmal bemerkt C, daß seine Kollegen A und B Eigelb im Bart haben und muß spöttisch grinsen. A bemerkt, daß C grinst, und daß C offenbar wegen des Eigelbs grinst. Plötzlich denkt sich A: „Warum merkt B eigentlich nicht, daß C ihn auslacht?" - und da kommt ihm der Gedanke: „O Gott, ich selber muß lächerlich aussehen!"
- Wie hat A argumentiert?
(Der Zahlentheoretiker J.E. Littlewood nannte die Argumentationsweise von A „genuine mathematics")

(6) Wir nennen die beiden 2-stelligen Junktoren J und J* *dual zueinander,* falls $\mathrm{val}(J(\Phi,\Psi)) = 1 - \mathrm{val}(J^*(\neg\Phi, \neg\Psi))$ für alle $\mathcal{L}$-Ausdrücke Φ und Ψ gilt. Beispielsweise sind die Junktoren $\wedge$ („und") und $\vee$ („oder") dual zueinander. Bestimmen Sie alle Paare dualer Junktoren.

§2. *Eine formale Sprache der Junktorenlogik*

Wir wollen jetzt eine formale Sprache aufbauen, in der wir die Gesetze der Junktoren-Logik formulieren können. Dazu gehen wir von einer Liste von Aussagen A_1, A_2,..., A_n,... aus, die wir mit den Junktoren aus §1 zu neuen Aussagen verbinden. Wir müssen für A_1, A_2,..., A_n,... keine „konkreten" Aussagen nehmen, denn es geht uns hier nicht um die Inhalte solcher Aussagen, sondern nur darum, daß sie 'wahr' oder 'falsch' sein können.

Die Sprache, die wir aufstellen wollen, soll so aufgebaut sein, daß ihre Ausdrücke eindeutig lesbar sind. In der Umgangssprache ist das ja leider nicht der Fall, was man an vielen Beispielen immer wieder erfahren kann. Wir bauen jetzt Sprachen auf, in denen die genannten Mißstände nicht auftreten.

<u>**Teil A**</u>: Sprachen in polnischer Notation

Der folgende Entwurf einer formalen Junktoren-logischen Sprache geht auf den polnischen Logiker Jan Łukasiewicz (1878-1956) zurück.

Sei $\mathcal{K}$ eine Menge von Junktoren beliebiger Stellenzahl. Wir wollen eine Sprache $\mathcal{L}_p(\mathcal{K})$ aufbauen, die nur Junktoren aus $\mathcal{K}$ enthält ($\mathcal{L}$ steht für 'lingua' (Sprache) und p deutet die polnische Notation an).

Das <u>**Alphabet**</u> von $\mathcal{L}_p(\mathcal{K})$ enthält die folgenden Zeichen:

(1) für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ ein Aussagensymbol A_n (diese Symbole seien paarweise verschieden), - und

(2) alle Junktoren aus $\mathcal{K}$.

Der <u>**Ausdruckskalkül**</u> für $\mathcal{L}_p(\mathcal{K})$:

<u>Regel 1</u>: Es ist erlaubt, jedes Aussagensymbol A_n hinzuschreiben.

<u>Regel 2:</u> Wenn **J** ein m-stelliger Junktor aus $\mathcal{K}$ ist, und wenn es erlaubt ist, die Zeichenreihen Φ_1 und Φ_2 und ... und Φ_m hinzuschreiben, dann darf man auch die Zeichenreihe $\mathbf{J}\Phi_1\Phi_2 ... \Phi_m$ hinschreiben.

Diejenigen Zeichenreihen, die man in endlich vielen Schritten unter Anwendung der beiden Regeln des Ausdrucks-Kalküls hinschreiben darf, heißen $\mathcal{L}_p(\mathcal{K})$-Ausdrücke. Eine Besonderheit der polnischen Notation ist, daß alle Junktoren den Argumenten vorangestellt werden. Im Falle der Konjunktion schreibt man hier beispielsweise $\wedge\Phi_1\Phi_2$ statt $\Phi_1 \wedge \Phi_2$.

Statt der Zeichen $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ benutzte Łukasiewicz allerdings die Buchstaben N, K, A, C, E, D etc.

Junktor	Notation von Łukasiewicz	Bezeichnung
$\neg\Phi$	N	Negation
$\Phi_1 \wedge \Phi_2$	K	Konjunktion
$\Phi_1 \vee \Phi_2$	A	Disjunktion ['Alternation']
$\Phi_1 \rightarrow \Phi_2$	C	Implikation ['Condition']
$\Phi_1 \leftrightarrow \Phi_2$	E	Äquivalenz [franz. 'Équivalence']
$\Phi_1 \mid \Phi_2$	D	Sheffer-Strich [engl.: alternative denial]

Demnach steht beispielsweise $K\Phi A\Psi\Phi$ für $\Phi \wedge (\Psi \vee \Phi)$, und $AK\Psi\Phi\Phi$ steht für $(\Psi \wedge \Phi) \vee \Phi$. Ferner steht $CC\Phi\Psi CN\Psi N\Phi$ für $(\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow (\neg\Psi \rightarrow \neg\Phi)$.

Da jeder Junktor eine feste Stellenzahl hat, sind alle $\mathcal{L}_p(\mathcal{K})$-Ausdrücke eindeutig lesbar, obwohl keine Klammern benutzt werden!

<u>Teil B</u>: Sprachen in üblicher Notation

Die polnische Notation hat den Vorteil, daß man ohne Klammern auskommt. Sie entspricht auch der mathematischen Praxis, Funktionszeichen immer den Argumenten voranzustellen. Sie entspricht aber nicht dem üblichen Sprachgebrauch. In den Umgangssprachen werden die zweistelligen Junktoren zumeist zwischen die beiden Teilaussagen gesetzt. Dies ist wohl auch der Grund, warum es so schwer fällt, Ausdrücke in polnischer Notation zu verstehen. Wir beschreiben daher jetzt noch eine andere Sprache, die sich enger an die natürlichen Sprachen anschließt. Der Einfachheit halber statten wir diese formale Sprache nur mit den beiden Junktoren $\neg$ und $\wedge$ aus. Wir werden in §3 sehen, daß diese Sprache ausdrucksstark genug ist, um jeden anderen Junktor darzustellen.

Das **Alphabet** der Sprache $\mathcal{L}(\neg, \wedge)$ enthält die folgenden Zeichen:

(1) für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ ein Aussagensymbol A_n (diese Symbole seien paarweise verschieden),

(2) die logischen Zeichen $\neg, \wedge$, und

(3) zwei Klammern, und zwar eine aufgehende Klammer (und eine zugehende Klammer).

Wie man aus diesem Zeichenvorrat Ausdrücke bildet, wird durch das folgende Regelsystem festgelegt.

Der **Ausdruckskalkül** für $\mathcal{L}(\neg, \wedge)$:

Regel 1: *Es ist erlaubt, jedes Aussagensymbol* A_n *hinzuschreiben.*

Regel 2: *Wenn es erlaubt ist, die Zeichenreihen* Φ *und* Ψ *hinzuschreiben, dann ist es auch erlaubt,* $(\neg\Phi)$ *und* $(\Phi \wedge \Psi)$ *hinzuschreiben.*

Diejenigen Zeichenreihen, die man nach endlich vielen Schritten unter Anwendung der beiden Regeln des Ausdruckskalküls hinschreiben darf, nennen wir $\mathcal{L}(\neg, \wedge)$-*Ausdrücke*, oder gelegentlich auch $\mathcal{L}(\neg, \wedge)$-*Aussagen*, oder $\mathcal{L}(\neg, \wedge)$-*Formeln*. Wir vereinbaren auch die folgende Notation:

$$\mathcal{L}(\neg, \wedge) = \text{Menge aller } \mathcal{L}(\neg, \wedge)\text{-Ausdrücke.}$$

Die Aussagensymbole A_n werden auch *atomare Ausdrücke* genannt.

Andere Sprachen. Wenn man Sprachen betrachten möchte, die andere Junktoren als Grundzeichen enthalten, so muß man die Regel 2 des Ausdruckskalküls entsprechend abändern. Das Alphabet der Sprache $\mathcal{L}(\neg, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow)$ beispielsweise enthält die logischen Zeichen $\neg, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$. Im Ausdruckskalkül erlaubt man statt $(\Phi \wedge \Psi)$ jetzt $(\Phi \vee \Psi)$, $(\Phi \rightarrow \Psi)$ und $(\Phi \leftrightarrow \Psi)$ hinzuschreiben.

Es stellt sich jetzt die Frage, ob die Mißstände, die wir in den natürlichen Sprachen angetroffen haben, in der formalen Sprache $\mathcal{L}(\neg, \wedge)$ vermieden sind. Um zeigen zu können, daß jeder $\mathcal{L}(\neg, \wedge)$-Ausdruck eindeutig lesbar ist, benötigen wir den Begriff des Klammergebirges und den Begriff der Länge eines $\mathcal{L}(\neg, \wedge)$-Ausdrucks.

Definition. Die Länge $L[\Phi]$ einer Zeichenreihe Φ ist die Anzahl der Stellen, an denen Zeichen des Alphabets stehen. Atomare Ausdrücke A_n haben stets die Länge 1.

Beispiel: $L[(A_3 \wedge (\neg A_3))] = 8$.

Konvention. Jeder $\mathcal{L}(\neg,\wedge)$-Ausdruck Φ kann als Funktion von der Menge $\{1,2,\ldots,L[\Phi]\}$ in das Alphabet von $\mathcal{L}(\neg,\wedge)$ aufgefaßt werden, wobei $\Phi(i)$ das i-te Symbol von Φ (von links her gelesen) ist.

Rekursive Definition des Klammergebirges. Jedem $\mathcal{L}(\neg,\wedge)$-Ausdruck Φ wird eine Funktion G_Φ von $\{0,1,2,\ldots,L[\Phi]\}$ in die Menge $\mathbf{Z}$ aller ganzen Zahlen wie folgt zugeordnet:

$$G_\Phi(0) = 0,$$

und für $0 \leq j < L[\Phi]$ sei:

$$G_\Phi(j+1) = \begin{cases} G_\Phi(j) + 1 & \text{falls } \Phi(j+1) \text{ eine aufgehende Klammer '(' ist.} \\ G_\Phi(j) & \text{falls } \Phi(j+1) \text{ keine Klammer ist.} \\ G_\Phi(j) - 1, & \text{falls } \Phi(j+1) \text{ eine zugehende Klammer ')' ist.} \end{cases}$$

Die Funktion G_Φ wird als „*Klammergebirge von Φ*" bezeichnet.

Beispiel. Sei Φ der Ausdruck $((A_1 \wedge (\neg A_3)) \wedge (\neg A_7))$. Das Klammergebirge G_Φ läßt sich dann wie folgt veranschaulichen:

Aus den Plateaus (Niveau-Linien) und Tälern von G_Φ kann man den Aufbau von Φ aus Teilformeln ablesen.

2.1 Proposition. *Für jeden $\mathcal{L}(\neg,\wedge)$-Ausdruck Φ und jede natürliche Zahl* i *mit* $0 \leq i \leq L[\Phi]$ gilt $G_\Phi(i) \geq 0$.

Es gilt $G_\Phi(i) = 0$ *genau dann wenn* $i = 0$ *oder* $i = L[\Phi]$.

Beweis. Wenn Φ aufgrund von Regel 1 hingeschrieben werden durfte, dann ist Φ ein Aussagensymbol A_n. Hier ist $L[A_n] = 1$ und $G_{A_n}(0) = G_{A_n}(1) = 0$.

Wenn Φ aufgrund von Regel 2 hingeschrieben werden durfte, dann hat Φ entweder die Form $(\neg\Psi)$ oder die Form $(\Psi\wedge\Theta)$. Zur Induktion nehmen wir an, daß für Ψ und Θ gilt:

(1) für alle $j \leq L[\Psi]$ ist $G_\Psi(j) \geq 0$. Es gilt $G_\Psi(j) = 0$ nur für $j=0$ und für $j = L[\Psi]$.

(2) für alle $j \leq L[\Theta]$ ist $G_\Theta(j) \geq 0$. Es gilt $G_\Theta(j) = 0$ nur für $j=0$ und für $j = L[\Theta]$.

Fall 1: Φ hat die Form $(\neg\Psi)$: Hier ist $G_\Phi(1) = G_\Phi(2) = 1$ und für $1 \leq j \leq L[\Psi]$: $G_\Phi(2+j) = 1 + G_\Psi(j)$. Wir entnehmen daraus und aus der Induktions-Annahme (1), daß $G_\Phi(j) \geq 1$ für $1 \leq j \leq 2 + L[\Psi]$. Aus $G_\Psi(L[\Psi]) = 0$ folgt noch $G_\Phi(2+L[\Psi]) = 1$ und daher $G_\Phi(L[\Phi]) = G_\Phi(2+L[\Psi]+1) = 1-1 = 0$.

Fall 2: Φ hat die Form $(\Psi\wedge\Theta)$. Die Behauptung folgt ähnlich wie im ersten Fall. ❑

Definition. Wenn Φ und Ψ zwei $\mathcal{L}(\neg,\wedge)$-Ausdrücke sind, dann soll $\Phi \hat{=} \Psi$ besagen, daß Φ und Ψ als Zeichenreihen aufgefaßt identisch sind. Mit anderen Worten,

$$\Phi \hat{=} \Psi \quad \text{bedeutet:} \quad \begin{cases} L[\Phi] = L[\Psi] \\ \textit{und} \\ \text{für alle } i \text{ mit } 0 < i \leq L[\Phi] \text{ gilt: } \Phi(i) = \Psi(i). \end{cases}$$

2.2 Satz (Eindeutige Lesbarkeit): *Sei Φ ein $\mathcal{L}(\neg,\wedge)$-Ausdruck. Dann ist genau einer der folgenden drei Fälle gültig:*

(i) Φ *ist ein Aussagensymbol,* $\Phi \hat{=} A_n$ *für genau eine natürliche Zahl* n,

(ii) $\Phi \hat{=} (\neg\Psi)$ für genau einen $\mathcal{L}(\neg,\wedge)$*-Ausdruck* Ψ.

(iii) $\Phi \hat{=} (\Psi\wedge\Theta)$ *mit eindeutig bestimmten* $\mathcal{L}(\neg,\wedge)$*-Ausdrücken* Ψ *und* Θ.

Beweis. Wenn $L[\Phi] = 1$, dann ist (i) gültig und weder (ii) noch (iii) können zutreffen.

Sei jetzt $L[\Phi] \geq 2$. Aufgrund der Regeln des Ausdruckskalküls wissen wir, daß dann $\Phi \hat{=} (\neg\Psi)$ oder $\Phi \hat{=} (\Psi\wedge\Theta)$ ist.

1.Fall: $\Phi \hat{=} (\neg\Psi)$. Wenn auch $\Phi \hat{=} (\neg\Theta)$ sein sollte, dann ist $(\neg\Psi) \hat{=} (\neg\Theta)$, also auch $\Psi \hat{=} \Theta$. Wenn auch $\Phi \hat{=} (\Gamma\wedge\Theta)$ sein sollte, dann wäre $(\neg\Psi) \hat{=} \Phi \hat{=} (\Gamma\wedge\Theta)$ und Γ müßte mit dem Negations-Zeichen beginnen. Solche Zeichenreihen kann man aber im Ausdruckskalkül nicht erzeugen. Also ist im Falle $\Phi \doteq (\neg\Psi)$ das Ψ eindeutig bestimmt, und Φ kann nicht zugleich die Form $(\Gamma\wedge\Theta)$ haben.

2. Fall: $\Phi \doteq (\Psi\wedge\Theta)$. Aufgrund des bisher bewiesenen kann Φ weder die Form A_n noch die Form $(\neg\Psi)$ haben. Angenommen, es wäre auch $\Phi \doteq (\Gamma\wedge\Sigma)$, also

(*) $$\Phi \doteq (\Psi\wedge\Theta) \doteq (\Gamma\wedge\Sigma).$$

Sollte dabei $\Psi \doteq A_n$ sein, dann wäre das erste Zeichen in Φ eine aufgehende Klammer und das zweite Zeichen wäre A_n und dieses müßte nach (*) das erste Zeichen von Γ sein. Nach den Regeln des Ausdruckskalküls ist das nur möglich, wenn $\Gamma \doteq A_n$ ist. Dann ergibt sich aus (*) aber auch $\Theta \doteq \Sigma$.

Sollte jedoch $L[\Psi] \geq 2$ sein, dann ist das erste Zeichen von Ψ eine aufgehende Klammer. Wegen (*) ist auch das erste Zeichen von Γ eine aufgehende Klammer. Nach Proposition 2.1 gilt für $0 < i < L[\Psi]$: $G_\Psi(i) \geq 1$ und $G_\Psi(L[\Psi]) = 0$. Das Klammergebirge von Φ ist also auf dem ganzen Intervall von 2 bis $L[\Psi]$ stets ≥ 2 und erreicht erst an der Stelle $1+L[\Psi]$ das Niveau 1. Eine analoge Aussage gilt für Γ: das Klammergebirge von Φ ist also auf dem ganzen Intervall von 2 bis $L[\Gamma]$ stets ≥ 2 und erreicht erst an der Stelle $1+L[\Gamma]$ das Niveau 1. Also $L[\Psi] = L[\Gamma]$ und wegen (*) gilt dann auch $\Psi \doteq \Gamma$. Dann liefert aber (*) auch noch $\Theta \doteq \Sigma$. Damit ist die Eindeutigkeit gezeigt. ❑

Satz 2.2 gilt in analoger Form auch für jede andere Sprache wie z.B. $\mathcal{L}(\neg,\rightarrow)$, $\mathcal{L}(\neg,\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow)$ etc.

Aus Satz 2.2 ergibt sich sofort, daß die Länge $L[\Psi]$ eines $\mathcal{L}$-Ausdrucks Ψ die folgenden Eigenschaften hat: $L[A_n] = 1$,

$$L[(\neg\Psi)] = 3 + L[\Psi], \quad \text{und}$$
$$L[(\Phi\wedge\Psi)] = 3 + L[\Phi] + L[\Psi].$$

Einen relativ kurzen Ausdruck übersieht man „mit bloßem Auge". Bei sehr langen Ausdrücken kann man den Aufbau aus Teilaussagen nur noch durch die Berechnung des Klammergebirges überschauen.

Zur leichteren Lesbarkeit kann es oft nützlich sein, Klammern verschiedener Größe zu benutzen, oder auch anders gestaltete Klammern zu verwenden, etwa {,} oder [,].

Um die Lesbarkeit zu erhöhen, treffen wir noch die folgende Konvention zur Klammerersparnis.

Konvention zur Klammerersparnis.

(i) $\neg$ bindet enger als jeder dyadische Junktor.

(ii) $\wedge$ und $\vee$ binden enger als $\rightarrow$.

(iii) $\wedge$ und $\vee$ binden enger als $\leftrightarrow$.

(iv) Iterierte $\wedge$-Verbindungen sowie iterierte $\vee$-Verbindungen sind von links her zu klammern.

(v) Die äußeren Klammern können weggelassen werden.

Streng genommen muß man sich jedoch immer die weggelassenen Klammern hinzudenken. So ist beispielsweise die Länge von $\neg\Phi$ nicht $1+L[\Phi]$, sondern $3+L[\Phi]$.

Beispiel: $\Phi \wedge \neg \Psi \wedge \Gamma \leftrightarrow \Phi \vee \Theta$ ist eine vereinfachte Darstellung von $(((\Phi \wedge (\neg \Psi)) \wedge \Gamma) \leftrightarrow (\Phi \vee \Theta))$.

Als Abürzungen für iterierte $\wedge$-Verbindungen und iterierte $\vee$-Verbindungen führen wir die Zeichen $\bigwedge$ bzw. $\bigvee$ ein:

$$\bigwedge_{1 \leq i \leq n} \Phi_i \quad \text{steht für} \quad (\ldots((\Phi_1 \wedge \Phi_2) \wedge \Phi_3) \wedge \ldots \wedge \Phi_n).$$

$$\bigvee_{1 \leq i \leq n} \Phi_i \quad \text{steht für} \quad (\ldots((\Phi_1 \vee \Phi_2) \vee \Phi_3) \vee \ldots \vee \Phi_n).$$

Definition. Für einen $\mathcal{L}(\neg,\wedge)$-Ausdruck Φ ist $\mathrm{Teil}(\Phi)$ die Menge aller Teilausdrücke von Φ. Diese Menge ist dabei wie folgt (durch Rekursion über den Ausdruckskalkül) definiert: $\mathrm{Teil}(A_n) = \{A_n\}$,

$$\mathrm{Teil}(\neg\Psi) = \mathrm{Teil}(\Psi) \cup \{\neg\Psi\}$$

$$\mathrm{Teil}(\Psi \wedge \Theta) = \mathrm{Teil}(\Psi) \cup \mathrm{Teil}(\Theta) \cup \{\Psi \wedge \Theta\}.$$

Die Elemente von $\mathrm{Teil}(\Phi)$ sind die sämtlichen Teilausdrücke von Φ.

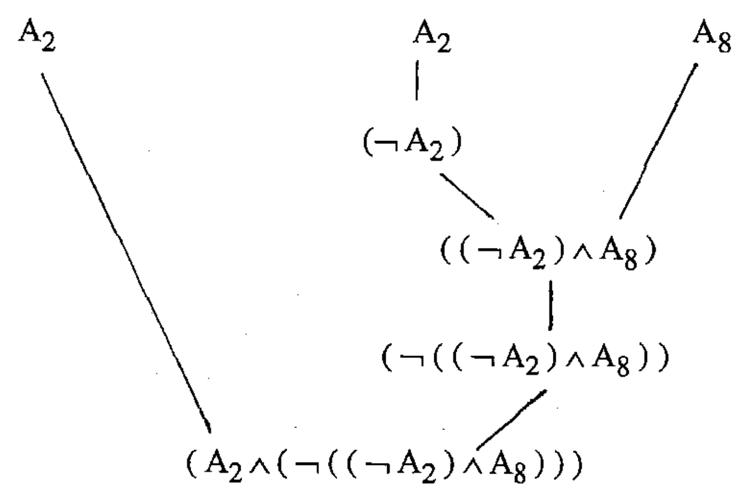
$\mathrm{At}(\Phi)$ sei die Menge aller atomaren Ausdrücke, die Teilausdrücke von Φ sind,

$$\mathrm{At}(\Phi) = \{A_n;\ A_n \in \mathrm{Teil}(\Phi)\}.$$

Nach Satz 2.2 ist $\mathrm{Teil}(\Phi)$ für jeden $\mathcal{L}(\neg,\wedge)$-Ausdruck Φ eindeutig bestimmt. Im Falle anderer junktorenlogischer Sprachen wird der Begriff des Teilausdruckes (auch Teilformel, oder Teilaussage genannt) analog definiert.

Der Stammbaum eines $\mathcal{L}(\neg,\wedge)$-Ausdrucks Φ. Der Prozeß der Konstruktion eines Ausdrucks Φ aus seinen Teilausdrücken kann sehr übersichtlich dargestellt werden, wenn man die Teilformeln auf die Knotenpunkte eines geeignet gewählten Baumes schreibt. Dabei schreibt man zunächst Φ hin. Wenn $\Phi \hat{=} (\neg\Psi)$, dann geht von Φ aus eine einzige Linie nach oben an deren Spitze man Ψ hinschreibt. Wenn jedoch $\Phi \hat{=} (\Psi \wedge \Theta)$, dann gehen von Φ aus zwei Linien nach oben. An die Spitze der ersten Linie schreibt man Ψ und an die Spitze der anderen Linie Θ. Man iteriert dieses Verfahren solange, bis man bei den atomaren Teilausdrücken angelangt ist.

Beispiel. Sei $\Phi \hat{=} (A_2 \wedge (\neg((\neg A_2) \wedge A_8)))$.



— * — * — * — * —

Wieviele Formeln gibt es überhaupt insgesamt?

2.3 Proposition. *Die Sprache $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\neg, \rightarrow)$ ist abzählbar.*

Beweis. Für eine natürliche Zahl n sei K_n die Menge aller $\mathcal{L}$-Ausdrücke der Länge $\leq n$, in denen keine Aussagen-Symbole A_j mit $j > n$ vorkommen,

$$K_n = \{\Phi \in \mathcal{L}; L[\Phi] \leq n \ \& \ At(\Phi) \subseteq \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}\}.$$

Es gibt nur $(n+4)^m$ Folgen der Länge m, die man aus den Zeichen $\neg, \rightarrow, (,), A_1, A_2, \ldots, A_n$ bilden kann. Daher gilt $\mathcal{K}ard(K_n) \leq \Sigma\ (n+4)^m$, wobei die Summe von $m = 1$ bis $m = n$ läuft. Nun ist $\mathcal{L}$ die Vereinigung aller

Mengen K_n (für $1 \leq n \in \mathbb{N}$), $\mathcal{L} = \bigcup \{K_n;\ 1 \leq n \in \mathbb{N}\}$, und daraus folgt, daß wir $\mathcal{L}$ abzählen können, indem wir mit A_1 beginnen (denn $K_1 = \{A_1\}$), und dann der Reihe nach die Elemente der endlichen Mengen

$$K_2 - K_1,\ K_3 - (K_1 \cup K_2),\ K_4 - (K_1 \cup K_2 \cup K_3), \text{etc.}$$

durchnumerieren. ❑

Ganz genauso folgt, daß auch all die anderen Sprachen $\mathcal{L}(\neg, \wedge, \rightarrow)$, $\mathcal{L}(\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \downarrow, \ldots)$, etc... abzählbar sind.

— * — * — * — * —

Wahrheitswertzuordnungen

Macht es Sinn zu sagen, daß ein Ausdruck der formalen Sprache $\mathcal{L}(\neg, \wedge)$ „wahr" oder „falsch" ist? Die Frage ist berechtigt, denn die Ausdrücke von $\mathcal{L}(\neg, \wedge)$ werden ausgehend von Symbolen $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ gebildet, und nicht ausgehend von konkreten Aussagen (wie beispielsweise „$5+7=11$", „17 ist eine Primzahl", etc.). Es macht ja keinen Sinn zu sagen, daß A_1 „wahr" wäre und A_2 „falsch" etc.

Aber die Symbole $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ stehen für Aussagen, die 'wahr' oder 'falsch' sein können. Wenn A_n für eine wahre Aussage steht, dann steht $\neg A_n$ für eine falsche Aussage, und so fort. Wir verallgemeinern dies und definieren:

Definition. Eine Funktion F, die jedem $\mathcal{L}(\neg, \wedge)$-Ausdruck Φ eine der beiden Zahlen 0 oder 1 zuordnet, wird *Wahrheitswertzuordnung* genannt, wenn für alle $\mathcal{L}(\neg, \wedge)$-Ausdrücke Ψ, Θ stets gilt:

$$F(\neg\Psi) = 1 - F(\Psi) \quad \text{und}$$

$$F(\Psi \wedge \Theta) = F(\Psi) \cdot F(\Theta).$$

Wenn man statt der Sprache $\mathcal{L}(\neg, \wedge)$ die Sprache $\mathcal{L}(\neg, \vee, \rightarrow)$ betrachten würde, dann würde man eine Abbildung F von $\mathcal{L}(\neg, \vee, \rightarrow)$ in $\{0,1\}$ als *Wahrheitswertzuordnung* bezeichnen, wenn stets $F(\neg\Psi) = 1 - F(\Psi)$ und

$$F(\Psi \vee \Theta) = \mathrm{Max}\,\{F(\Psi), F(\Theta)\} \text{ und}$$

$$F(\Psi \rightarrow \Theta) = \mathrm{Max}\,\{1 - F(\Psi), F(\Theta)\}$$

gilt. Dabei bezeichnet Max(M) das größte Element (Maximum) der Menge M. Wenn die Sprache einen n-stelligen Junktor J enthält, dessen Wahrheitstafel durch die n-stellige Funktion $f_J\colon \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ gegeben ist, dann wird man von der Wahrheitswertzuordnung $F(J(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)) = f_J(F(\Phi_1), \ldots, F(\Phi_n))$ verlangen.

Notation. Wenn F eine Abbildung von A in M ist, dann ist $F \subseteq A \times M$. Wenn B Teilmenge von A ist, dann bezeichnet $F \upharpoonright B$ die Einschränkung (Restriktion) von F auf B, also $F \upharpoonright B = F \cap (B \times M)$.

2.4 Proposition. *Jede Abbildung* f *von* $\{A_n;\ 1 \leq n \in \mathbb{N}\}$ *in* $\{0,1\}$ *kann zu genau einer Wahrheitswertzuordnung* F *von* $\mathcal{L}(\neg,\wedge)$ *in* $\{0,1\}$ *fortgesetzt werden. Auf diese Weise erhält man alle Wahrheitswertzuordnungen, die auf* $\mathcal{L}(\neg,\wedge)$ *definiert sind.*

Beweis. (1.) Wir definieren F durch Rekursion. Für atomare Ausdrücke A_n setzen wir $F(A_n) := f(A_n)$. Wenn F für Ψ und Θ bereits definiert ist, dann setzen wir $F(\neg\Psi) := 1 - F(\Psi)$ und $F(\Psi \wedge \Theta) := F(\Psi) \cdot F(\Theta)$. Nach Satz 2.2 ist F die eindeutig bestimmte Wahrheitswertzuordnung, die f fortsetzt.

(2.) Wenn F eine beliebige Wahrheitswertzuordnung ist, die auf $\mathcal{L}(\neg,\wedge)$ definiert ist, dann ist F offenbar die Fortsetzung seiner eigenen Einschränkung auf $\{A_n;\ 1 \leq n \in \mathbb{N}\}$, also $F \supseteq f := F \upharpoonright \{A_n;\ 1 \leq n \in \mathbb{N}\}$. ❑

Der folgende Satz trägt den Namen „Koinzidenztheorem", weil er von Wahrheitswertzuordnungen F und G handelt, die auf einer bestimmten Menge von atomaren Ausdrücken übereinstimmen (d.h. koinzidieren). Wir beweisen diesen Satz durch Induktion. Wir könnten ihn durch Induktion nach $L[\Phi]$ führen, aber eine Induktion über den Formelaufbau ist sehr viel angemessener. Wie eine derartige Induktion durchzuführen ist, wollen wir an dieser Stelle exemplarisch vorführen.

2.5 Koinzidenz-Theorem. *Seien* F *und* G *Wahrheitswertzuordnungen und* Φ *irgendein* $\mathcal{L}(\neg,\wedge)$*-Ausdruck. Wenn* $F \upharpoonright At(\Phi) = G \upharpoonright At(\Phi)$, *dann gilt* $F(\Phi) = G(\Phi)$.

Beweis (durch Induktion über den Formelaufbau): Nach Satz 2.2 hat Φ entweder die Form $\Phi \triangleq A_n$ (für genau eine natürliche Zahl n) oder die Form $\Phi \triangleq (\neg\Psi)$ (für genau einen $\mathcal{L}(\neg,\wedge)$*-Ausdruck* Ψ) oder die Form $\Phi \triangleq (\Psi \wedge \Theta)$ (mit eindeutig bestimmten $\mathcal{L}(\neg,\wedge)$-Ausdrücken Ψ und Θ.).

1. Fall: $\Phi \triangleq A_n$ (Induktions-Verankerung). Dann ist $At(\Phi) = \{A_n\}$ und nach Voraussetzung gilt $F(\Phi) = F(A_n) = G(A_n) = G(\Phi)$.

2. Fall: $\Phi \triangleq (\neg\Psi)$. Dann ist $At(\Phi) = At(\Psi)$. Da nach Voraussetzung $F \upharpoonright At(\Phi) = G \upharpoonright At(\Phi)$ gilt, haben wir auch $F \upharpoonright At(\Psi) = G \upharpoonright At(\Psi)$. Wir nehmen zur Induktion an, daß daraus $F(\Psi) = G(\Psi)$ folgt. Dann erhalten wir:

$$F(\Phi) = F(\neg\Psi) = 1 - F(\Psi) = 1 - G(\Psi) = G(\neg\Psi) = G(\Phi).$$

3. Fall: $\Phi \mathrel{\widehat{=}} (\Psi \wedge \Theta)$. Dann ist $At(\Phi) \supseteq At(\Psi)$ und $At(\Phi) \supseteq At(\Theta)$. Da nach Voraussetzung $F \restriction At(\Phi) = G \restriction At(\Phi)$ gilt, haben wir auch $F \restriction At(\Psi) = G \restriction At(\Psi)$ und $F \restriction At(\Theta) = G \restriction At(\Theta)$. Wir nehmen zur Induktion an, daß daraus $F(\Psi) = G(\Psi)$ und $F(\Theta) = G(\Theta)$ folgt. Dann erhalten wir:

$$F(\Phi) = F(\Psi \wedge \Theta) = F(\Psi) \cdot F(\Theta) = G(\Psi) \cdot G(\Theta) = G(\Psi \wedge \Theta) = G(\Phi). \qquad \square$$

Übungsaufgaben zu §2

(1) Übersetzen Sie die folgenden $\mathcal{L}_p(A,C,K,N)$-Ausdrücke in gleichwertige $\mathcal{L}(\neg, \vee, \wedge, \rightarrow)$-Ausdrücke:

(i) $K\Phi A\Phi\Psi$,

(ii) $KA\Phi\Psi C\Psi\Theta$,

(iii) $CC\Phi\Psi CN\Psi N\Phi$,

(iv) $CC\Phi\Psi CC\Psi\Theta C\Phi\Theta$.

(2) Übersetzen Sie die folgenden $\mathcal{L}(\neg, \vee, \wedge, \rightarrow)$-Ausdrücke in gleichwertige $\mathcal{L}_p(A,C,K,N)$-Ausdrücke:

(i) $(\neg\Psi) \rightarrow (\Psi \rightarrow \Phi)$,

(ii) $\big((\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow (\Phi \vee \Theta)\big) \rightarrow \Phi$,

(iii) $(\neg\Phi) \rightarrow \big(\Phi \rightarrow (\Psi \wedge \Phi)\big)$.

(3) Beweisen Sie die eindeutige Lesbarkeit von Formeln aus $\mathcal{L}_p(\neg, \wedge, \vee)$ in der klammerfreien polnischen Notation.

§3. *Adäquate Mengen von Junktoren*

In §1 hatten wir alle monadischen und alle dyadischen extensionalen Junktoren kennengelernt. Wir hatten dort gesehen, daß es neben den wohlbekannten Junktoren wie $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ noch zahlreiche Junktoren gibt, mit denen wir keinesfalls vertraut sind. Es stellt sich die Frage, ob wir uns auch mit den unüblichen Junktoren vertraut machen müssen. Müssen wir etwa auch den Gebrauch aller drei-stelligen, vier-stelligen Junktoren etc. einüben?

In §4 wollen wir alle logisch-allgemeingültigen Aussagen-Verbindungen bestimmen. Könnte es nicht sein, daß mittels drei-stelliger, vier-stelliger Junktoren etc. logisch allgemeingültige Aussagen hingeschrieben werden können, die mit ein- und zwei-stelligen Junktoren allein gar nicht formulierbar sind? Könnte es nicht auch sein, daß einige der ungelösten Probleme der Mathematik deshalb noch ungelöst sind, weil wir in den Beweisen immer nur ein- und zwei-stellige Junktoren betrachten? Es könnte doch gültige Schluß-Regeln geben, die n-stellige Junktoren enthalten, die wir nie zur Kenntnis genommen haben, mit denen aber einige der noch ungelösten Probleme gelöst werden könnten.

Dies ist (leider) nicht der Fall. Wir werden zeigen, daß man mit $\neg$ und $\wedge$ allein jeden beliebigen n-stelligen Junktor ausdrücken kann. Dieses nützliche Ergebnis besagt, daß uns nichts entgeht, wenn wir nur mit den beiden wohlvertrauten Junktoren $\neg$ und $\wedge$ arbeiten.

Konvention. Wenn wir im Folgenden von Junktoren sprechen, dann sind immer extensionale Junktoren gemeint.

Definition. Sei $\mathcal{K}$ eine Menge von ein- oder mehr-stelligen Junktoren, und sei **J** ein n-stelliger Junktor. Wir sagen, daß **J** durch die Junktoren aus $\mathcal{K}$ *ausdrückbar* ist, wenn es einen $\mathcal{L}(\mathcal{K})$-Ausdruck Φ gibt, dessen atomare Teilaussagen genau $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sind, derart, daß für jede Wahrheitswertzuordnung
F: $\mathcal{L}(\mathcal{K} \cup \{\mathbf{J}\}) \rightarrow \{0,1\}$ gilt:

$$F(\Phi) = F(\mathbf{J}(A_1, A_2, \ldots, A_n)).$$

Zwei Ausdrücke Φ und Ψ nennen wir *extensional gleich,* wenn für jede Wahr-heitswertzuordnung F gilt $F(\Phi) = F(\Psi)$.

Beispiele (1): $\Phi \to \Psi$ und $(\neg\Phi) \vee \Psi$ sind extensional gleich, und daher läßt sich $\to$ mittels $\neg$ und $\vee$ ausdrücken.

(2): Der Junktor $\vee$ („oder" im nicht-ausschließenden Sinne) läßt sich durch die beiden Junktoren $\wedge$ (Konjunktion) und $\succ\!\prec$ (Alternative, das ist das „oder" im ausschließenden Sinne) ausdrücken. Dazu zeigen wir, daß $\Phi_1 \vee \Phi_2$ und $(\Phi_1 \succ\!\prec \Phi_2) \succ\!\prec (\Phi_1 \wedge \Phi_2)$ *extensional gleich* sind, d.h. die gleichen Wahrheitswert-Tafeln haben.

Φ	Ψ	$\Phi \succ\!\prec \Psi$	$\Phi \wedge \Psi$	$(\Phi \succ\!\prec \Psi) \succ\!\prec (\Phi \wedge \Psi)$	$\Phi \vee \Psi$
0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1

In der lateinischen Lyrik gibt es ein schönes Beispiel für den Gebrauch des Junktors $(\Phi \succ\!\prec \Psi) \succ\!\prec (\Phi \wedge \Psi)$. In seinem *Brief an die Pisonen* (auch *de arte poetica* genannt), Verse 333-334, sagt Horaz:

> *aut prodesse volunt, aut delectare poetae,*
> *aut simul et iucunda et idonea dicere vitae.*
>
> (<u>Entweder</u> verfolgen die Dichter das Ziel, uns zu nützen <u>oder</u> uns zu belustigen, <u>oder</u> sie verbinden beides und sagen, was erfreulich und nützlich für das Leben ist)

Da $(\Phi \succ\!\prec \Psi) \succ\!\prec (\Phi \wedge \Psi)$ mit $\Phi \vee \Psi$ extensional gleich ist, hätte Horaz kürzer sagen können:

> *prodesse volunt* vel *delectare poetae.*

Aber Horaz will die Junktoren nicht extensional gebrauchen, denn er will dem Dichter (und Mathematiker!) Eratosthenes (Ἐρατοσθένης, geboren ca. 295/275 v.u.Z.) widersprechen, der einmal gesagt hatte, daß ein Dichter nur zur Unterhaltung schreiben solle - siehe dazu: A.Kiessling & R.Heinze: Q.Horatius Flaccus Briefe (Berlin 1914, Seite 347).

Definition. Wir nennen eine Menge $\mathcal{K}$ von Junktoren *adäquat,* falls für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ jeder n-stellige Junktor durch die Junktoren aus $\mathcal{K}$ ausdrückbar ist.

3.1 Satz (E.L. Post, 1921) *Die folgenden Mengen von Junktoren sind adäquat:*

(i) $\{\neg, \wedge\}$,

(ii) $\{\neg, \vee\}$,

(iii) $\{\neg, \rightarrow\}$.

Beweis. Zu (i): Wir zeigen durch Induktion nach n, daß jeder n-stellige Junktor $\mathbf{J}$ mittels $\neg$ und $\wedge$ ausdrückbar ist.

$n = 1$: $\Phi \wedge \neg \Phi$ ist das falsum, $\neg(\Phi \wedge \neg \Phi)$ ist das Verum. Die Affirmation benötigt keine besondere Darstellung. Die Negation $\neg$ ist nach Voraussetzung vorhanden.

Wir nehmen zur Induktion an, daß alle n-stelligen Junktoren mittels $\neg$ und $\wedge$ ausdrückbar sind.

Sei jetzt $\mathbf{J}$ ein (n+1)-stelliger Junktor. Wir definieren zwei n-stellige Junktoren $\mathbf{J}_0$ und $\mathbf{J}_1$ wie folgt:

$$\mathbf{J}(\Phi_1 \wedge \neg \Phi_1, \Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n) \quad \text{werde } \mathbf{J}_0(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n) \text{ genannt,}$$

$$\mathbf{J}(\neg(\Phi_1 \wedge \neg \Phi_1), \Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n) \quad \text{werde } \mathbf{J}_1(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n) \text{ genannt.}$$

Es ist klar, daß $\mathbf{J}(\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n)$ und

$$(\neg \Phi_0 \wedge \mathbf{J}_0(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n)) \vee (\Phi_0 \wedge \mathbf{J}_1(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n))$$

die gleichen Wahrheitswert-Tafeln haben. Man kann hier die Disjunktion $\vee$ eliminieren, denn $A \vee B$ und $\neg(\neg A \wedge \neg B)$ sind extensional gleich. Daher sind auch $\mathbf{J}(\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n)$ und

$$\neg\Big(\neg(\neg \Phi_0 \wedge \mathbf{J}_0(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n)) \wedge \neg(\Phi_0 \wedge \mathbf{J}_1(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n))\Big)$$

extensional gleich. Da aufgrund der Induktions-Annahme $\mathbf{J}_0$ und $\mathbf{J}_1$ mittels $\neg$ und $\wedge$ ausdrückbar sind, so sehen wir jetzt, daß es auch $\mathbf{J}$ ist.

Zu (ii): $\Phi \wedge \Psi$ und $\neg(\neg \Phi \vee \neg \Psi)$ haben die gleichen Wahrheitswert-Tafeln. Also ist $\wedge$ mit $\neg$ und $\vee$ ausdrückbar. Die Behauptung folgt jetzt sofort aus (i).

Zu (iii): $\Phi \vee \Psi$ und $(\neg \Phi) \rightarrow \Psi$ haben die gleichen Wahrheitswert-Tafeln. Also ist $\vee$ mit $\neg$ und $\rightarrow$ ausdrückbar. Die Behauptung folgt jetzt sofort aus (ii).

❑

Vielleicht vermuten jetzt einige Leser, daß $\neg$ zusammen mit jedem beliebigen dyadischen Junktor stets eine adäquate Menge bilden würde. Wir zeigen, daß das nicht der Fall ist und beweisen dazu, daß weder $\{\neg, \leftrightarrow\}$ noch $\{\neg, >\!\!<\}$ adäquat sind.

Definition. Für zwei Mengen A und B wird

$$A \,^{\Delta} B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$$

die *symmetrische Differenz* von A und B genannt (das hochgestellte Δ steht für „Differenz“ und ist offenbar ein modifizierter „Minus“-Strich). Es gilt

$$A \,^{\Delta} B = B \,^{\Delta} A\,.$$

Es gilt offenbar: $x \in A \,^{\Delta} B \;\Leftrightarrow (x \in A \;\succ\!\!\prec\; x \in B)$.

Für eine endliche Menge A sei $|A|$ die Anzahl der Elemente von A.

3.2 Hilfssatz. *Sei* M *eine endliche Menge und seien* $A \subseteq M$ *und* $B \subseteq M$ *Teilmengen derart, daß* $|A|$ *und* $|B|$ *beide gerade sind. Dann ist auch* $|A \,^{\Delta} B|$ *gerade.*

Beweis. Die Mengen $A - B$ und $B - A$ sind disjunkt, also

$$(*) \qquad |A \,^{\Delta} B| = |A - B| + |B - A|\,.$$

Wäre $|A \,^{\Delta} B|$ ungerade, dann müßte einer der beiden Summanden in (*) gerade sein und der andere ungerade. Sei o.B.d.A. $|A - B|$ gerade und $|A - B|$ ungerade. Aber $|A|$ ist nach Voraussetzung gerade und $|A| = |A - B| + |A \cap B|$. Also müßte auch $|A \cap B|$ gerade sein. Dann wäre aber $|B| = |B - A| + |A \cap B|$ ungerade, ein Widerspruch. ❑

3.3 Satz. *Der Junktor* $\rightarrow$ *läßt sich nicht mittels* $\neg$ *und* $\leftrightarrow$ *ausdrücken. Daher ist* $\{\neg, \leftrightarrow\}$ *nicht adäquat.*

Beweis. Allgemeine Vorbemerkungen: Für einen $\mathcal{L}(\neg, \leftrightarrow)$-Ausdruck Φ sei $At(\Phi)$ die Menge aller atomaren Teilaussagen von Φ (siehe §2). Sei $\mathcal{W}$ die Menge aller Wahrheitswertzuordnungen $F\colon \mathcal{L}(\neg, \leftrightarrow) \rightarrow \{0, 1\}$. Für eine natürliche Zahl $n \geq 1$ und einen $\mathcal{L}(\neg, \leftrightarrow)$-Ausdruck Φ sei

$$N_n(\Phi) = \{\langle F(A_1), \ldots, F(A_n)\rangle \in \{0, 1\}^n;\ F \in \mathcal{W} \text{ und } F(\Phi) = 0\},$$

$$E_n(\Phi) = \{\langle F(A_1), \ldots, F(A_n)\rangle \in \{0, 1\}^n;\ F \in \mathcal{W} \text{ und } F(\Phi) = 1\},$$

Dabei bezeichnet $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ das geordnete n-tupel der Elemente $a_1, \ldots, a_n$.

Behauptung: für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ und alle $\mathcal{L}(\neg, \leftrightarrow)$-Ausdrücke Φ mit $At(\Phi) \subseteq \{A_1, \ldots, A_n\}$ gilt: $|N_n(\Phi)|$ und $|E_n(\Phi)|$ sind gerade Zahlen.

Wir beweisen die Behauptung durch Induktion über den Aufbau von Φ. Für atomare Ausdrücke A_i (mit $1 \leq i \leq n$) gilt:

$$N_n(A_i) = \underbrace{\{0,1\} \times \ldots \times \{0,1\}}_{i-1} \times \underset{\text{an der Stelle } i}{\underset{\uparrow}{\{0\}}} \times \underbrace{\{0,1\} \times \ldots \times \{0,1\}}_{n-i},$$

und daher ist offenbar $|N_n(A_i)| = 2^{i-1} \cdot 2^{n-i} = 2^{n-1}$ eine gerade Zahl. Ebenso ist $|E_n(A_i)| = 2^{n-1}$ gerade für $n \geq 2$. - Sei jetzt Φ nicht atomar.

1.Fall: $\Phi \doteq \Psi \leftrightarrow \Theta$ und $At(\Phi) \subseteq \{A_1,\ldots,A_n\}$. Dann ist auch $At(\Psi) \subseteq \{A_1,\ldots,A_n\}$ und $At(\Theta) \subseteq \{A_1,\ldots,A_n\}$. Aus der Induktions-Annahme folgt, daß die vier Zahlen

$$|N_n(\Psi)|, \quad |N_n(\Theta)|, \quad |E_n(\Psi)| \text{ und } |E_n(\Theta)|$$

alle gerade sind. Nun ist aber aufgrund der Wahrheitstafel für $\leftrightarrow$:

$$\begin{aligned} N_n(\Phi) &= (E_n(\Psi) \cap N_n(\Theta)) \cup (E_n(\Theta) \cap N_n(\Psi)) = \\ &= (E_n(\Psi) - E_n(\Theta)) \cup (E_n(\Theta) - E_n(\Psi)) = \\ &= E_n(\Psi) \,\Delta\, E_n(\Theta), \end{aligned}$$

und nach Hilfssatz 3.2 ist auch $|N_n(\Phi)|$ gerade. Wegen $E_n(\Phi) = \{0,1\}^n - N_n(\Phi)$ ist auch $|E_n(\Phi)|$ gerade.

2.Fall: $\Phi \doteq \neg\Theta$ und $At(\Phi) \subseteq \{A_1,\ldots,A_n\}$. Dann ist auch $At(\Phi) = At(\Theta)$. Wegen $E_n(\Phi) = N_n(\Theta)$ und $N_n(\Phi) = E_n(\Theta)$ folgt die Behauptung sofort aus der Induktions-Annahme.

Aus der Behauptung folgt jetzt sofort, daß die Implikation „$\rightarrow$" nicht mittels $\neg$ und $\leftrightarrow$ darstellbar ist, denn in der Wahrheitswert-Tafel von „$\rightarrow$" stehen drei Einsen und eine Null. ❑

3.4 Korollar. *Die Disjunktion $\vee$ läßt sich nicht mittels Negation $\neg$ und Alternative $\succ\!\prec$ ausdrücken. Daher ist $\{\neg, \succ\!\prec\}$ nicht adäquat.*

Beweis. $\Phi \succ\!\prec \Psi$ läßt sich in $\mathcal{L}(\neg, \leftrightarrow)$ durch $\neg(\Phi \leftrightarrow \Psi)$ ausdrücken. Wenn $\vee$ durch $\neg$ und $\succ\!\prec$ ausdrückbar wäre, dann wäre $\vee$ auch durch $\neg$ und $\leftrightarrow$ ausdrückbar. Nach Satz 3.1(ii) wäre dann jeder Junktor mittels $\neg$ und $\leftrightarrow$ ausdrückbar. Das ist ein Widerspruch zu Satz 3.3. ❑

3.5 <u>**Satz**</u> *Der Peircesche Pfeil $\downarrow$ und der Sheffer-Strich $|$ sind die einzigen dyadischen Junktoren* $\mathbf{J}$ *derart, daß* $\{\mathbf{J}\}$ *adäquat ist.*

<u>Beweis</u>. Wir zeigen zuerst, daß sowohl $\{\downarrow\}$ als auch $\{|\}$ adäquat sind. Wir erinnern daran, daß

$$\mathrm{val}(\Phi \downarrow \Psi) = \mathrm{val}(\neg\Phi)\cdot\mathrm{val}(\neg\Psi) \quad \textit{und} \quad \mathrm{val}(\Phi \mid \Psi) = 1 - \mathrm{val}(\Phi \wedge \Psi).$$

<u>1. Schritt</u> (nach Ch.S.Peirce, 1902): Wir zeigen, daß $\{\downarrow\}$ adäquat ist: $\neg\Phi$ kann durch $\Phi\downarrow\Phi$ und $\Phi\wedge\Psi$ durch $(\Phi\downarrow\Phi)\downarrow(\Psi\downarrow\Psi)$ ausgedrückt werden. Die Behauptung folgt jetzt aus Satz 3.1(i).

<u>2. Schritt</u>: (nach H.M.Sheffer, 1913): Wir zeigen, daß $\{|\}$ adäquat ist: $\neg\Phi$ kann durch $\Phi|\Phi$ und $\Phi\vee\Psi$ durch $(\Phi|\Phi)|(\Psi|\Psi)$ ausgedrückt werden. Die Behauptung folgt jetzt aus Satz 3.1(ii).

<u>3. Schritt</u>: Sei jetzt $\mathbf{J}$ ein beliebiger dyadischer Junktor derart, daß $\{\mathbf{J}\}$ eine adäquate Menge ist. Was ist dann $f_{\mathbf{J}}(1,1) = ?$

Angenommen, es wäre $f_{\mathbf{J}}(1,1) = 1$. Dann wäre auch

$$f_{\mathbf{J}}(1, f_{\mathbf{J}}(1,1)) = f_{\mathbf{J}}(f_{\mathbf{J}}(1,1), 1) = f_{\mathbf{J}}(f_{\mathbf{J}}(1,1), f_{\mathbf{J}}(1,1)) = 1$$

und durch Induktion folgt daraus, daß für jeden 2-stelligen Junktor $\mathbf{J}^*$, der mittels $\mathbf{J}$ allein ausdrückbar ist, $f_{\mathbf{J}^*}(1,1) = 1$ gilt. Dann wäre aber die Kontravalenz $>\!\!-\!\!<$ nicht mittels $\mathbf{J}$ allein ausdrückbar. Also wäre $\{\mathbf{J}\}$ nicht adäquat, ein Widerspruch. Das zeigt, daß $f_{\mathbf{J}}(1,1) = 0$ gelten muß. Ganz genauso folgt $f_{\mathbf{J}}(0,0) = 1$.

Wenn $f_{\mathbf{J}}(1,0) = f_{\mathbf{J}}(0,1) = 1$, dann ist $\mathbf{J}$ der Sheffer-Strich.

Wenn $f_{\mathbf{J}}(1,0) = f_{\mathbf{J}}(0,1) = 0$, dann ist $\mathbf{J}$ der Peircesche Pfeil.

Wenn aber $f_{\mathbf{J}}(1,0) = 1$ und $f_{\mathbf{J}}(0,1) = 0$, dann wäre $\mathbf{J}$ die Postnonpendenz $\rightarrow\!|$ und im Falle $f_{\mathbf{J}}(1,0) = 0$ und $f_{\mathbf{J}}(0,1) = 1$ wäre $\mathbf{J}$ die Pränonpendenz $|\!\leftarrow$. Beide Junktoren sind aber nichts anderes als die Negation (des zweiten, bzw. des ersten Arguments). Nach Satz 3.3 sind weder $\{\rightarrow\!|\}$ noch $\{|\!\leftarrow\}$ adäquat. ❑

Literatur:

<u>Emil L. Post</u>: *Introduction to a general theory of elementary propositions.* American Journal of Math., Band 43 (1921), pp.163-185.

<u>Henry Maurice Sheffer</u>: *A set of five independent postulates for Boolean Algebras, with application to logical constants.* Transactions Amer. Math. Soc., Band 14 (1913), pp.481-488.

Übungsaufgaben zu §3

(1) Zeigen Sie, daß $\{\vee, \leftrightarrow, \succ\!\prec\}$ eine adäquate Menge von Junktoren ist.

(2) Zeigen Sie, daß keine der folgenden Mengen adäquat ist:

(i) $\{\vee, \wedge\}$, (ii) $\{\vee, \rightarrow\}$, (iii) $\{\vee, \succ\!\prec\}$.

(3) Sei **J** einer der vier Junktoren: Präpendenz, Postpendenz, Pränonpendenz oder Postnonpendenz. Zeigen Sie, daß man mit $\neg$ und **J** diese vier Junktoren und keine anderen zweistelligen Junktoren ausdrücken kann.

(4) Drücken Sie die Junktoren $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ und $\leftrightarrow$ unter alleiniger Verwendung des Peirceschen Pfeiles $\downarrow$ aus und übersetzen Sie anschließend die folgenden $\mathcal{L}(\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow)$-Ausdrücke in gleichwertige $\mathcal{L}(\downarrow)$-Ausdrücke:

(i) $(\Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Phi))$,
(ii) $(\Phi \wedge \Psi) \rightarrow (\Psi \vee \neg\Phi)$,
(iii) $\Phi \leftrightarrow \neg\neg\Phi$.

(5) Übersetzen Sie die folgenden $\mathcal{L}(\mid)$ - Ausdrücke in gleichwertige $\mathcal{L}(\neg, \rightarrow)$-Ausdrücke:

(i) $\Phi \mid (\Psi \mid \Psi)$,
(ii) $(\Phi \mid \Phi) \mid ((\Phi \mid (\Psi \mid \Psi)) \mid (\Phi \mid (\Psi \mid \Psi)))$.

(6) Läßt sich der drei-stellige Junktor „Entweder Φ oder Ψ oder Θ" (d.h. genau eine der drei Aussagen Φ, Ψ, Θ ist wahr) mit dem 2-stelligen Junktor $\succ\!\prec$ (entweder-oder) allein ausdrücken?

§4. *Tautologien*

„Die Tautologie ist und bleibt doch das höchste Prinzip, der höchste Grundsatz des Denkens. Was Wunders da, daß die meisten Menschen sie in Gebrauch haben."

Sören Kierkegaard: Entweder/Oder (1.Teil)

Zwischen den beiden Aussagen

(*) *1 22 333 22 1 ist eine Primzahl*

und

(**) *1 22 1 ist eine Primzahl oder keine Primzahl*

besteht ein bemerkenswerter Unterschied. Beide Aussagen sind wahr, aber (*) ist aufgrund des Inhalts wahr, während (**) bereits aufgrund der äußeren Form wahr ist. Um die Gültigkeit von (*) einzusehen, muß man wissen, was eine Primzahl ist und man muß rechnen können. Um die Gültigkeit von (**) behaupten zu können, braucht man weder zu wissen, was eine Primzahl ist, noch rechnen zu können . (**) ist eine 'Tautologie'.

Aussagen, die aufgrund ihrer Form wahr sind, nennt man seit Ludwig Wittgenstein (*Tractatus logico philosophicus*, 1918, Ziffer 4.26) Tautologien. Das Wort kommt aus dem Griechischen ταὐτὸ λέγειν (= dasselbe sagen).

Dem ursprünglichen Wortsinne nach ist eine Tautologie eine Redeweise, die einen Sachverhalt mehrfach wiedergibt. Wohlbekannte Beispiele dafür sind der „weiße Schimmel" und der „Hochaltar" (denn im Lateinischen ist bereits alta ara der erhöhte Steinblock). Als Beispiel für eine Tautologie gibt Immanuel Kant (1724-1804) in seiner 'Logik' den Satz *»der Mensch ist Mensch«* an (I.Kants 'Logik', herausgegeben von G.B.Jäsche, I. Allgemeine Elementarlehre, §37) . Hier wird ein Sachverhalt in der Tat zweimal genannt. Sätze dieser Bauart sind offenbar immer wahr. Wir fassen jetzt den Begriff der 'Tautologie' etwas allgemeiner und verlassen damit allerdings den eigentlichen Wortsinn (siehe dazu aber auch die Bemerkung auf Seite 36):

Definition (L.Wittgenstein, 1918) Sei $\mathcal{L}$ irgendeine junktorenlogische Sprache. Ein $\mathcal{L}$-Ausdruck Φ wird *Tautologie* genannt, wenn für jede Wahrheitswertzuordnung F stets $F(\Phi) = 1$ gilt.
Φ wird *Kontradiktion* genannt, wenn $\neg\Phi$ eine Tautologie ist.

In dem folgenden Satz stellen wir die wichtigsten Tautologien zusammen. Die Bezeichnungen entstammen zum Teil der traditionellen Logik.

<u>4.1 Satz</u>: *Für beliebige $\mathcal{L}(\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow)$-Ausdrücke Φ, Ψ und Θ sind die folgenden Formeln stets Tautologien:*

(i) *Satz vom ausgeschlossenen Dritten:* $\Phi \vee \neg \Phi$.

(ii) *Satz vom Widerspruch:* $\neg(\Phi \wedge \neg \Phi)$.

(iii) *Negations-Regel:* $\Phi \leftrightarrow \neg\neg \Phi$.

(iv) *Burläus-v.Ockham-De Morgan Regeln:* $(\neg \Phi \vee \neg \Psi) \leftrightarrow \neg(\Phi \wedge \Psi)$

$(\neg \Phi \wedge \neg \Psi) \leftrightarrow \neg(\Phi \vee \Psi)$

(v) *Distributiv-Gesetze:* $\Theta \vee (\Phi \wedge \Psi) \leftrightarrow (\Theta \vee \Phi) \wedge (\Theta \vee \Psi)$,

und $\Theta \wedge (\Phi \vee \Psi) \leftrightarrow (\Theta \wedge \Phi) \vee (\Theta \wedge \Psi)$.

(vi) *Exportations-Regel:* $((\Phi \wedge \Psi) \rightarrow \Theta) \leftrightarrow (\Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Theta))$

(vii) *Kontrapositions-Regel:* $(\Phi \rightarrow \Psi) \leftrightarrow (\neg \Psi \rightarrow \neg \Phi)$.

(viii) *Kommutativ-Gesetze:* $(\Phi \wedge \Psi) \leftrightarrow (\Psi \wedge \Phi)$,

und $(\Phi \vee \Psi) \leftrightarrow (\Psi \vee \Phi)$.

<u>Beweis</u>. Sei F eine Wahrheitswertzuordnung.

<u>Zu</u> (i): $F(\Phi \vee \neg \Phi) = \operatorname{Max}\{F(\Phi), 1 - F(\Phi)\} = 1$.

<u>Zu</u> (iv): $F(\neg \Phi \vee \neg \Psi) = \operatorname{Max}\{1 - F(\Phi), 1 - F(\Psi)\} =$

$= 1 - \operatorname{Min}\{F(\Phi), F(\Psi)\} = 1 - F(\Phi)\cdot F(\Psi) = F(\neg(\Phi \wedge \Psi))$,

und daher $F((\neg \Phi \vee \neg \Psi) \leftrightarrow \neg(\Phi \wedge \Psi)) = 1$.

<u>Zu</u> (v): $F(\Theta \wedge (\Phi \vee \Psi)) = F(\Theta)\cdot \operatorname{Max}\{F(\Phi), F(\Psi)\} =$

$= \operatorname{Max}\{F(\Theta)\cdot F(\Phi), F(\Theta)\cdot F(\Psi)\} =$

$= \operatorname{Max}\{F(\Theta \wedge \Phi), F(\Theta \wedge \Psi)\} = F((\Theta \wedge \Phi) \vee (\Theta \wedge \Psi))$,

und daher $F(\Theta \wedge (\Phi \vee \Psi) \leftrightarrow (\Theta \wedge \Phi) \vee (\Theta \wedge \Psi)) = 1$.

Die übrigen Behauptungen werden auf analoge Weise bestätigt. ❑

Bemerkung zum 'tertium non datur': Der sogenannte „Satz vom ausgeschlossenen Dritten“ [principium exclusi tertii seu medii inter duo contradictoria[1])] wurde erstmals von Aristoteles in der 'Metaphysik' (4.Buch, Abschnitt VII,1, Zeile 1011b24) und der Zweiten Analytik (1.Buch, Abschnitt I, Zeile 71a14) ausgesprochen. Der Beweis beruht ganz wesentlich auf der

---

[1]) Prinzip des ausgeschlossenen Dritten oder Mittleren zwischen zwei sich widersprechenden Aussagen

Voraussetzung, daß die auftretenden Teilaussagen Φ und $\neg\Phi$ aristotelisch sind, d.h. einen der beiden Wahrheitswerte 0 oder 1 haben. Außerhalb der extensionalen zweiwertigen Logik ist der Satz vom ausgeschlossenen Dritten nicht immer gültig.

Bemerkung zu den 'Burläus - v.Ockham - De Morgan-Regeln': Diese beiden Regeln wurden wohl zuerst von Walter Burläus (Burleigh) 1324 in seinem Werk „De puritate artis logicae, tractatus brevior" formuliert. Er schreibt dort:

„Dicendum pro regula, quod contradictorium copulativae valet unam disiunctivam habentem partes contradicentes partibus copulativae. Verbi gratia, contradictoria huius copulativae: 'Sortes currit et Plato currit', valet istam: 'Sortes non currit vel Plato non currit'.

Alia regula est, quod contradictorium disiunctivae aequipollet copulativae factae ex contradictoriis partium disiunctivae. Verbi gratia, contradictoria huius: 'Sortes currit vel Plato currit', valet istam: 'Sortes non currit et Plato non currit'.

Burläus (geboren um 1275, gestorben nach 1344) sagt, daß die Negation einer Konjunktion mit der Disjunktion der negierten Teilaussagen logisch äquivalent ist und gibt als Beispiel, daß die Negation von „Sokrates läuft und Platon läuft" mit „Sokrates läuft nicht oder Platon läuft nicht" logisch äquivalent ist. Danach erwähnt er auch die dazu duale Regel. Siehe: W. Burleigh De Puritate Artis Logicae etc., (Ph. Boehner, Herausgeber), Franciscan Institute Publications, Paderborn 1955, p. 209). In ähnlicher Weise beschreibt auch Wilhelm von Ockham (geboren um 1285, gestorben 1347) diese beiden Regeln in seiner 1325 geschriebenen Summa Logicae, pars secunda (Ph. Boehner, Herausgeber), Franciscan Institute Publications, Paderborn 1954, pp. 316-317). Danach werden diese Regeln auch von anderen Autoren immer wieder erwähnt bis sie schließlich im 18. Jahrhundert wieder vergessen wurden. In der Neuzeit werden sie erstmalig wieder von Augustus De Morgan (1806-1871) in seiner Abhandlung „On the syllogism, Part 3" (1858) erwähnt. Er formulierte die Regeln wie folgt:

„The contrary of an aggregate is the compound of the contraries of the aggregants; the contrary of a compound is the aggregate of the contraries of the components".

Diese Regeln bezeichnet man heute oft als „De Morgansche Regeln". Es ist sicherlich richtiger, sie mit den drei Namen, W. Burläus, W.v.Ockham und A. De Morgan, zu verknüpfen.

— * —

In der traditionellen Logik, so wie sie Jahrhunderte lang in der Philosophie gelehrt wurde, geht man gelegentlich auch anders vor. Man stellt dort den Satz vom ausgeschlossenen Dritten an den Anfang und folgert, daß jede Aussage aristotelisch sein müsse, also einen der beiden Wahrheitswerte, 0 oder 1, haben müsse. Der Satz vom Widerspruch bewirkt, daß eine Aussage nur höchstens einen der beiden Wahrheitswerte haben kann (vergl. August Stadler: *Logik,* Leipzig 1912, Seite 9).

Die allgemeinen Distributiv-Gesetze: Man kann die beiden Distributiv-Gesetze aus Satz 4.1 wie folgt verallgemeinern:

Seien $I_1, I_2 \ldots, I_n$ endliche Mengen und $I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$ ihr Cartesisches Produkt. Für ein geordnetes n-tupel f sei f(i) die i-te Koordinate von f, also $f = \langle f(1), f(2), \ldots, f(n) \rangle$. Dann sind die folgenden Ausdrücke Tautologien:

$$\Big(\bigwedge_{1 \le i \le n} \bigvee_{j \in I_i} \Phi_j \Big) \longleftrightarrow \Big(\bigvee_{f \in I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n} \bigwedge_{1 \le i \le n} \Phi_{f(i)} \Big).$$

und

$$\Big(\bigvee_{1 \le i \le n} \bigwedge_{j \in I_i} \Phi_j \Big) \longleftrightarrow \Big(\bigwedge_{f \in I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n} \bigvee_{1 \le i \le n} \Phi_{f(i)} \Big).$$

Die Burläus-v.Ockham-De Morgan Formeln erlauben es, jeden $\mathcal{L}(\neg, \wedge, \vee)$-Ausdruck Φ in eine einfache und übersichtliche Form zu bringen.

Definition. Einen $\mathcal{L}(\neg, \wedge, \vee)$-Ausdruck Φ der Form

$$\bigwedge_{1 \le i \le n} \bigvee_{j \in I_i} \Phi_j,$$

(bei geeignter Wahl der Indexmengen I_i) nennen wir einen Ausdruck in *konjunktiver Normalform,* wenn dabei die Ausdrücke Φ_i entweder atomar oder negiert-atomare Ausdrücke sind (d.h. wenn die Ausdrücke Φ_i entweder die Form A_k oder die Form $\neg A_k$ haben).

Wenn man in dieser Definition die Zeichen für Konjunktion und Disjunktion vertauscht, erhält man die sogenannte *disjunktive Normalform.*

4.2 Satz *Zu jedem* $\mathcal{L}(\neg, \wedge, \vee)$*-Ausdruck* Φ *gibt es einen* $\mathcal{L}(\neg, \wedge, \vee)$*-Ausdruck* Ψ *mit den folgenden Eigenschaften:*

(i) Ψ *ist in konjunktiver Normalform,*

(ii) $At(\Phi) = At(\Psi)$,

(iii) $\Psi \leftrightarrow \Phi$ *ist eine Tautologie.*

Beweis (durch Induktion über den Formelaufbau):

1. Fall: Φ ist atomar. Wir setzen $\Psi \triangleq \Phi$ und haben nichts zu zeigen.

2. Fall: $\Phi \triangleq \neg\Theta$. Zur Induktion nehmen wir an, daß Θ eine konjunktive Normalform hat, $\Theta \leftrightarrow \bigwedge\bigvee\Gamma_j$, wobei die Ausdrücke Γ_j atomar oder negiert-atomar sind. Dann ist nach den Burläus-v.Ockham-De Morgan-Regeln:

$$\Phi \leftrightarrow \neg\Theta \leftrightarrow \neg \bigwedge_{1\leq i\leq n} \bigvee_{j\in I_i} \Gamma_j \leftrightarrow \bigvee_{1\leq i\leq n} \bigwedge_{j\in I_i} \neg\Gamma_j$$

$$\leftrightarrow \bigwedge_{f\in I_1\times\ldots\times I_n} \bigvee_{1\leq i\leq n} \neg\Gamma_{f(i)} \text{ (nach dem allgemeinen Distributiv-Gesetz).}$$

3. Fall: $\Phi \triangleq \Phi_1 \wedge \Phi_2$. Zur Induktion nehmen wir an, daß sowohl Φ_1 als auch Φ_2 eine konjunktive Normalform haben,

$$\Phi_1 \leftrightarrow \bigwedge_{1\leq i\leq n} \bigvee_{j\in I_i} \Gamma_j, \qquad \Phi_2 \leftrightarrow \bigwedge_{n+1\leq i\leq m} \bigvee_{j\in I_i} \Gamma_j,$$

wobei die Γ_j atomar oder negiert-atomar sind. Es ist klar, daß die Konjunktion der beiden Normalformen bereits eine konjunktive Normalform von Φ liefert.

4. Fall: $\Phi \triangleq \Phi_1 \vee \Phi_2$. Zur Induktion nehmen wir an, daß sowohl Φ_1 als auch Φ_2 konjunktive Normalformen haben. Aus dem allgemeinen Distributiv-Gesetz folgt dann sofort, daß auch $\Phi_1 \vee \Phi_2$ eine konjunktive Normalform hat. ❑

Der folgende Satz ist ein erster Höhepunkt in dem Gebiet der Aussagenlogik. Er zeigt, daß das Programm von Leibniz, das wir in der Einleitung geschildert hatten, zu einem kleinen Teil realisierbar ist. Wenn man prüfen will, ob ein vorgelegter $\mathcal{L}(\neg,\wedge)$-Ausdruck eine Tautologie ist, dann kann dies auf rein mechanische Weise geschehen. Mit Leibniz darf man sagen „calculemus!" - laßt uns nachrechnen!

4.3 Satz (P.Bernays 1918, E.L.Post 1921) *Es gibt ein mechanisches Verfahren mit dem man von jedem vorgelegten $\mathcal{L}(\neg,\wedge,\ldots)$-Ausdruck Φ in endlich vielen Schritten entscheiden kann, ob er eine Tautologie ist oder nicht.*

1. Beweis (nach E.L.Post): Sei $\Phi \in \mathcal{L}(\neg,\wedge,\ldots)$ vorgegeben. Im ersten Schritt erstellen wir das Klammergebirge G_Φ (siehe §2). Damit läßt sich in einem

zweiten Schritt der Stammbaum von Φ erstellen. Damit kann auch die Menge $At(\Phi)$ der atomaren Teilausdrücke von Φ explizit bestimmt werden. Sei

$$At(\Phi) = \{ A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_n} \}.$$

Im dritten Schritt werden die sämtlichen Wahrheitswertzuordnungen (siehe §2) $F: At(\Phi) \to \{0,1\}$ (etwa in lexikographischer Anordnung) erzeugt. Für jede derartige Wahrheitswertzuordnung F wird jetzt in einem vierten Schritt der Wert $F(\Phi)$ berechnet, indem man von den Spitzen des Stammbaumes bis zur Wurzel herabsteigt. Man belegt also zunächst die atomaren Teilausdrücke A_{i_j} mit den Wahrheitswerten $F(A_{i_j})$ und rechnet dann die Wahrheitswerte der unmittelbaren Vorgänger (im Formelstammbaum) aus, etc. Wenn $F(\Phi) = 1$ für jede der 2^n verschiedenen Wahrheitswertzuordnungen F gilt, dann ist Φ eine Tautologie und sonst nicht. ❑

2. Beweis (nach P.Bernays): Sei $\Phi \in \mathcal{L}(\neg, \wedge, \vee)$ vorgegeben. Bringe Φ zunächst gemäß Satz 4.2 in eine konjunktive Normalform $\Psi_1 \wedge \Psi_2 \wedge \ldots \wedge \Psi_m$. Dabei ist jedes Ψ_i eine Disjunktion bestehend aus atomaren oder negiert-atomaren Ausdrücken. Offenbar ist Φ genau dann eine Tautologie, wenn jedes Glied Ψ_i wenigstens zwei Terme enthält, von denen das eine die Negation des anderen ist. ❑

Bemerkung. Das Argument von Bernays zeigt etwas mehr als das Argument von Post, nämlich, daß ein $\mathcal{L}(\neg, \wedge, \vee)$-Ausdruck Φ genau dann eine Tautologie ist, wenn in der konjunktiven Normalform $\Psi_1 \wedge \ldots \wedge \Psi_m$ von Φ jedes Konjunktionsglied Ψ_i die Form $(A_{k_i} \to A_{k_i}) \vee \Gamma_i$ hat (für geeignete atomare Ausdrücke A_{k_i}, wobei wir $A_j \to A_i$ als Abkürzung für $\neg A_j \vee A_i$ schreiben). Diese auftretenden Implikationen sind auch im eigentlichen Wortsinne 'Tautologien'. Wir sehen, daß die von Wittgenstein vorgeschlagene Terminologie gar nicht so sehr den eigentlichen Wortsinn verläßt.

— * — * — * —

Wenn man das Entscheidungsverfahren konkret ausführen will, etwa nach dem Muster des ersten Beweises (E. L. Post), dann muß man den Formelstammbaum nicht aufzeichnen. Es genügt, das Klammergebirge zu erstellen um alle Teilformeln zu erkennen. Jetzt kann man die Wahrheitswerte der Teilformeln der Reihe nach ausrechnen. Man beginnt mit den kürzesten Teilformeln und geht der Reihe nach zu den längeren über. Die errechneten Wahrheitswerte schreibt man in die Spalten unterhalb der jeweiligen Junktoren.

Beispiel. Ist $((A_1 \wedge A_2) \rightarrow A_3) \leftrightarrow (A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow A_3))$ eine Tautologie? - Wir erstellen dazu eine Tabelle. Links vom senkrechten Doppelstrich schreiben wir in die Spalten von A_1, A_2, A_3 die sämtlichen Wahrheitswertzuordnungen, etwa in lexikographischer Anordnung.
• Dann kann man die entsprechenden Wahrheitswerte von $A_1 \wedge A_2$ ausrechnen, und wir schreiben sie in die Spalte unterhalb von $\wedge$.
• Als nächstes rechnen wir die Wahrheitswerte von $A_2 \rightarrow A_3$ aus und schreiben sie in die Spalte unter den Implikationspfeil.
• Jetzt kann man auch die Wahrheitswerte von $(A_1 \wedge A_2) \rightarrow A_3$ ausrechnen und wir schreiben sie in die Spalte unterhalb des Implikationszeichens $\rightarrow$.
• Die Wahrheitswerte von $A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow A_3)$ schreiben wir unter den „äußeren" Implikations-Pfeil.
• Abschließend kann man die Wahrheitswerte des ganzen Ausdrucks ausrechnen, wobei wir die Werte unter den Doppelpfeil schreiben. Wir sehen, daß sich immer der Wert 1 ergibt und wissen damit, daß der Ausdruck eine Tautologie ist.

A_1	A_2	A_3	$((A_1$	$\wedge$	$A_2)$	$\rightarrow$	$A_3)$	$\leftrightarrow$	$(A_1$	$\rightarrow$	$(A_2$	$\rightarrow$	$A_3))$
0	0	0		0		1		1		1		1	
0	0	1		0		1		1		1		1	
0	1	0		0		1		1		1		0	
0	1	1		0		1		1		1		1	
1	0	0		0		1		1		1		1	
1	0	1		0		1		1		1		1	
1	1	0		1		0		1		0		0	
1	1	1		1		1		1		1		1	

Literatur

Paul Bernays: *Axiomatische Untersuchungen des Aussagen-Kalküls der „Principia Mathematica"*. Habilitations-Schrift, Göttingen 1918. Eine gekürzte Fassung erschien in der Mathematischen Zeitschrift Band 25 (1926), pp.305-320.

Emil L. Post: *Introduction to a general theory of elemtary propositions*. American Math. Journal, Band 43 (1921), pp.163-185.

Übungsaufgaben zu §4

(1) Im ersten Teil von Goethes „Faust" heißt es in der 2. Studierzimmer-Szene:

„Der Philosoph, der tritt herein
Und beweist Euch, es müßt' so sein:
Das Erst' wär' so, das Zweite so,
und drum das Dritt' und Vierte so;
Und wenn das Erst' und Zweit' nicht wär',
Das Dritt' und Viert' wär nimmermehr,"

Präzisieren Sie diese Argumentation unter Verwendung von Klammern. Wie muß man Mephisto korrigieren , damit daraus eine Tautologie entsteht.

(2) Zeigen Sie, daß die folgenden Ausdrücke Tautologien sind:

(i) $(\Phi \to \Psi) \to \big((\Theta \vee \Phi) \to (\Theta \vee \Psi)\big)$,

(ii) $(\Phi \to \Psi) \wedge (\Psi \to \Theta)) \to (\Phi \to \Theta)$.

(iii) $(\Phi \wedge \Psi) \to (\Phi \leftrightarrow \Psi)$.

(iv) $\Phi \to (\Psi \leftrightarrow (\Phi \wedge \Psi))$.

(v) $(\neg \Phi) \to (\Psi \leftrightarrow (\Phi \vee \Psi))$.

(vi) $(\Phi \leftrightarrow \Psi) \leftrightarrow (\Phi \vee \Psi \;\to\; \Phi \wedge \Psi)$.

(3) Leibniz hatte um 1780 herum den folgenden tautologischen Satz gefunden, den er voll Stolz *„praeclarum theorema"* nannte (G.W.Leibniz, Philos. Werke (Gerhard, Herausgeber), Band 7, p.223). Zeigen Sie, daß dieses „glänzende Theorem" tatsächlich eine Tautologie ist:

$$(\Phi_1 \to \Psi_1) \wedge (\Phi_2 \to \Psi_2) \to (\Phi_1 \wedge \Phi_2 \;\to\; \Psi_1 \wedge \Psi_2).$$

Zeigen Sie, daß auch $(\Phi_1 \to \Psi_1) \wedge (\Phi_2 \to \Psi_2) \to (\Phi_1 \vee \Phi_2 \;\to\; \Psi_1 \vee \Psi_2)$ eine Tautologie ist.

(4) Zeigen Sie, daß das „Peirce'sche Gesetz" $((\Phi \to \Psi) \to \Phi) \to \Phi$ eine Tautologie ist [Peirce hatte es 1885 entdeckt und in seinem Essay *'On the algebra of logic, a contribution to the philosophy of notation'*, Amer.J.Math. 7 (1885), pp.180-202, (dort p.189) publiziert].

(5) Zeigen Sie, daß für beliebige $\mathcal{L}$-Ausdrücke Φ, Ψ und Θ stets

(i) $\big((\Phi \leftrightarrow \Psi) \leftrightarrow \Theta\big) \leftrightarrow \big(\Phi \leftrightarrow (\Psi \leftrightarrow \Theta)\big)$ (Assoziativität)

und (ii) $(\Phi \leftrightarrow \Psi) \leftrightarrow \neg(\Phi \leftrightarrow \neg\Psi)$.

Tautologien sind.

(6) Sei Φ ein $\mathcal{L}(\neg, \leftrightarrow)$-Ausdruck. Zeigen Sie, daß Φ genau dann eine Tautologie ist, wenn jedes in Φ vorkommende atomare Aussagensymbol A_n geradzahlig oft vorkommt, und ebenso $\neg$ geradzahlig oft vorkommt.

Tip: Verwenden Sie Aufgabe (5), (i) und (ii).

(7) Geben Sie die konjunktive Normalform von $\neg(A_1 \wedge (A_2 \vee A_3) \wedge \neg A_4)$ an.

(8) Sei **J** ein ein-stelliger, extensionaler Junktor so, daß $\mathbf{J}(\Phi) \rightarrow (\Phi \rightarrow \Psi)$ eine Tautologie ist. Dann ist **J** die Negation oder das falsum.

(9) Sei **J** ein 2-stelliger, extensionaler Junktor.

(i) Wenn $\mathbf{J}(\Phi, \mathbf{J}(\Psi, \Phi))$ und $\neg\mathbf{J}(\mathbf{J}(\Phi, \Phi), \neg\mathbf{J}(\Phi, \Phi))$ Tautologien sind, dann ist **J** die „Implikation".

(ii) Wenn $\mathbf{J}(\Phi, \mathbf{J}(\Psi, \Phi))$ und $\neg\mathbf{J}(\mathbf{J}(\Phi, \Phi), \neg\mathbf{J}(\Phi, \Phi))$ Kontradiktionen sind, dann ist **J** die „Präsektion".

§5. *Der Begriff der Folgerung*

Sei $\mathcal{L}$ irgendeine junktorenlogische Sprache, Φ ein $\mathcal{L}$-Ausdruck und Σ eine Menge von $\mathcal{L}$-Ausdrücken, also

$$\Phi \in \mathcal{L} \text{ und } \Sigma \subseteq \mathcal{L}.$$

Wenn wir sagen, *daß Φ aus Σ folgt,* dann soll damit offenbar zum Ausdruck gebracht werden, daß jemand, der bereit ist, die Gültigkeit aller Aussagen Ψ aus Σ anzunehmen, auch die Gültigkeit von Φ zugestehen muß. Wir definieren daher:

Definition Sei $\Phi \in \mathcal{L}$ und $\Sigma \subseteq \mathcal{L}$. Wir sagen, daß Φ *aus* Σ *folgt* [in Zeichen: $\Sigma \models \Phi$], wenn für jede Wahrheitswert-Zuordnung F mit $F(\Psi) = 1$ für alle $\Psi \in \Sigma$ stets auch $F(\Phi) = 1$ gilt.

Diese Fassung des Folgerungsbegriffs stammt aus der Antike (siehe etwa Sextus Empiricus: „Gegen die Dogmatiker", Buch II, §303; siehe aber auch Bernard Bolzano (1781-1848) „Wissenschaftslehre", 1837, Band II, Seite 114 und Seite 396).

Die Notation $\Sigma \models \Phi$ wurde 1956 von dem nord-amerikanischen Logiker Stephen Cole Kleene (1909-1994) eingeführt ($\models$ ist eine Modifikation des Fregeschen Urteils-Striches $\vdash$).

Offenbar gilt $\{\Phi\} \models \Psi$ genau dann wenn $\Phi \to \Psi$ eine Tautologie ist. Das deutet an, daß zwischen der Folgerung $\models$ und der Implikation $\to$ eine enge Beziehung besteht. Es gilt in der Tat der folgende Satz:

5.1 Satz: (Export-Import-Theorem) *Für beliebige $\mathcal{L}(\to,...)$-Ausdrücke Φ und Ψ und beliebige Teilmengen $\Sigma \subseteq \mathcal{L}(\to,...)$ gilt:*

$$\Sigma \cup \{\Phi\} \models \Psi \quad \textit{genau dann wenn} \quad \Sigma \models \Phi \to \Psi$$

Beweis. Wenn F eine Wahrheitswert-Zuordnung ist mit $F(\Psi) = 1$ für alle $\Psi \in \Sigma$, dann gilt $F(\Phi \to \Psi) = 1$ genau dann wenn aus $F(\Phi) = 1$ stets $F(\Psi) = 1$ folgt. ❑

Definition. Zwei $\mathcal{L}$-Ausdrücke Φ und Ψ heißen *logisch äquivalent* (in Zeichen: $\Phi \dashv\models \Psi$), wenn sowohl $\{\Phi\} \models \Psi$ als auch $\{\Psi\} \models \Phi$ gilt (d.h., wenn $\Phi \leftrightarrow \Psi$ eine Tautologie ist).

Die Relation $\models$ gehört nicht zur Sprache $\mathcal{L}(\rightarrow,...)$! In der Tat ist $\models$ eine Relation zwischen Teilmengen und Elementen von $\mathcal{L}(\rightarrow,...)$. Demgegenüber ist '$\rightarrow$' ein Junktor, der zur Sprache $\mathcal{L}(\rightarrow,...)$ gehört. Satz 5.1 erlaubt es, den Implikations-Pfeil aus der Sprache $\mathcal{L}(\rightarrow,...)$ heraus in die Metasprache (d.h. die Sprache, in der wir über $\mathcal{L}(\rightarrow,...)$ reden) zu exportieren, und umgekehrt auch die metasprachliche Folge-Beziehung $\models$ in die Objekt-Sprache $\mathcal{L}(\rightarrow,...)$ hinein zu importieren. In Satz 5.1 wird also der Folgerungsbegriff auf die Implikation zurückgeführt (und umgekehrt).

Wenn Σ eine Menge von $\mathcal{L}$-Ausdrücken ist, für die es keine einzige Wahrheitswert-Zuordnung F mit $F(\Phi) = 1$ für alle $\Phi \in \Sigma$ gibt, dann gilt offenbar $\Sigma \models \Psi$ für jeden $\mathcal{L}$-Ausdruck Ψ. Aus solchen Mengen Folgerungen zu ziehen, ist wenig interessant. Solche Mengen sind nicht 'erfüllbar' im Sinne der folgenden Definition.

Definition. Sei Σ eine Menge von $\mathcal{L}$-Ausdrücken, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\neg,\rightarrow,\ldots)$. Σ heißt *erfüllbar,* wenn es eine Wahrheitswert-Zuordnung F gibt, $F: \mathcal{L} \rightarrow \{0, 1\}$, so daß $F(\Phi) = 1$ für alle $\Phi \in \Sigma$.

Beispiele. Nach Proposition 2.3 ist die Menge $\{A_1, A_2,..., A_n,...\}$ aller atomaren Aussagen erfüllbar. Dagegen ist die Menge aller $\mathcal{L}$-Ausdrücke offenbar nicht erfüllbar. - Wir werden in §7 zeigen, daß eine Menge von $\mathcal{L}$-Ausdrücken genau dann erfüllbar ist, wenn sie 'widerspruchsfrei' ist.

— * — * —

Wir wollen uns jetzt der Frage zuwenden, was man grundsätzlich über die Folgerungen sagen kann, die man aus einer vorgegebenen Menge Σ von Prämissen ziehen kann. Wir beginnen mit drei banalen Feststellungen:

(*) Wenn Ψ eine Tautologie ist, dann gilt für jede beliebige Menge Σ von $\mathcal{L}$-Ausdrücken offenbar $\Sigma \models \Psi$.

(**) Wenn Σ eine unerfüllbare Menge von $\mathcal{L}$-Ausdrücken ist, dann gilt für jeden beliebigen $\mathcal{L}$-Ausdruck Ψ offenbar $\Sigma \models \Psi$.

(***) Aus einer Menge Σ von Tautologien kann man nur Tautologien folgern.

Interessant ist daher erst der Fall, in dem die Menge der Prämissen erfüllbar ist, aber nicht nur aus Tautologien besteht. Solche Mengen heißen *kontingent,* denn die Menge $\mathcal{W}$ aller Wahrheitswert-Zuordnungen wird dabei in zwei disjunkte, nicht-leere Klassen zerlegt [im Lateinischen heißt contingĕre 'berühren', 'sich gegenseitig berühren', 'einteilen', 'in Kontingente zerlegen'].

Definition. Eine Menge Σ von $\mathcal{L}$-Ausdrücken heißt *kontingent,* wenn sie erfüllbar ist, aber nicht von jeder Wahrheitswert-Zuordnung erfüllt wird.

Beispielsweise ist die Menge $\{A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots\}$ aller atomaren Aussagen kontingent. Die Menge *Taut* aller Tautologien ist jedoch nicht kontingent.

Wir betrachten zunächst den einfachen Fall $\{\Psi\} \models \Phi$ mit der Extremal-Bedingung, daß Ψ und Φ keine gemeinsamen atomaren Teilformeln haben.

<u>**5.2 Proposition**</u>: *Für die $\mathcal{L}(\neg, \rightarrow, \ldots)$-Ausdrücke Φ und Ψ gelte $\{\Psi\} \models \Phi$ und $\mathrm{At}(\Psi) \cap \mathrm{At}(\Phi) = \varnothing$. Dann ist entweder Ψ eine Kontradiktion oder Φ eine Tautologie.*

<u>Beweis</u>. 1.Fall: Ψ ist eine Kontradiktion. Dann ist die Behauptung gültig und wir sind fertig. 2. Fall: Ψ ist keine Kontradiktion. Dann gibt es eine Wahrheitswertzuordnung F mit $F(\Psi) = 1$. Sei jetzt G eine beliebige Wahrheitswertzuordnung. Wir betrachten die Einschränkungen $f = F \upharpoonright \mathrm{At}(\Psi)$ und $g = G \upharpoonright \mathrm{At}(\Phi)$. Weil $\mathrm{At}(\Psi)$ und $\mathrm{At}(\Phi)$ disjunkt sind, ist $f \cup g$ eine Funktion, die nach Proposition 2.4 zu einer Wahrheitswert-Zuordnung H fortgesetzt werden kann. Es gilt dann $F \upharpoonright \mathrm{At}(\Psi) = H \upharpoonright \mathrm{At}(\Psi)$ und daher nach dem Koinzidenz-Theorem 2.5: $1 = F(\Psi) = H(\Psi)$. Wegen $\{\Psi\} \models \Phi$ gilt dann auch $H(\Phi) = 1$. Nun ist aber auch $G \upharpoonright \mathrm{At}(\Phi) = H \upharpoonright \mathrm{At}(\Phi)$ und daher nach dem Koinzidenz-Theorem $G(\Phi) = H(\Phi)$, also $1 = G(\Phi)$. Da G beliebig war, ist Φ eine Tautologie. ❑

Mit demselben Beweis folgt die etwas stärkere Aussage:

5.2* **Proposition**: *Wenn* $\Sigma \models \Phi$ *und* $\mathrm{At}(\Psi) \cap \mathrm{At}(\Phi) = \varnothing$ *für jedes* $\Psi \in \Sigma$, *und wenn* Σ *erfüllbar ist, dann ist* Φ *eine Tautologie.* ❑

Wir wenden uns jetzt dem Fall zu, in dem die Prämissen und die daraus gezogene Folgerung gemeinsame atomare Teilformeln besitzen. In diesem Fall gilt der folgende Interpolations-Satz von William Craig:

5.3 **Interpolations-Satz** (W. Craig, 1957): *Für die* $\mathcal{L}$*-Ausdrücke* Φ *und* Ψ *gelte* $\{\Psi\} \models \Phi$ *und* $\mathrm{At}(\Psi) \cap \mathrm{At}(\Phi) \neq \varnothing$. *Dann gibt es einen* $\mathcal{L}$*-Ausdruck* Θ *mit den folgenden Eigenschaften:*

(i) $\mathrm{At}(\Theta) = \mathrm{At}(\Psi) \cap \mathrm{At}(\Phi)$, *und*

(ii) $\{\Psi\} \models \Theta$ *und* $\{\Theta\} \models \Phi$.

Beweis. Sei $\mathrm{At}(\Psi) - \mathrm{At}(\Phi) = \{A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_n}\}$. Wenn $\mathrm{At}(\Psi) - \mathrm{At}(\Phi) = \varnothing$, also $\mathrm{At}(\Psi) \subseteq \mathrm{At}(\Phi)$, dann können wir $\Theta \triangleq \Psi$ setzen und sind offenbar fertig. Wir nehmen daher jetzt den Fall $\mathrm{At}(\Psi) - \mathrm{At}(\Phi) \neq \varnothing$ an. Wir wählen irgendeine atomare Aussage $A_s \in \mathrm{At}(\Psi) \cap \mathrm{At}(\Phi)$. Für eine beliebige Funktion f von $\{1, 2, \ldots, n\}$ in $\{0,1\}$ sei Ψ_f der $\mathcal{L}$-Ausdruck, der aus Ψ entsteht, indem man für jedes k mit $1 \leq k \leq n$, jedes A_{i_k}, überall wo dieses Symbol in Ψ vorkommt, im Falle $f(k) = 0$ durch $(A_s \wedge \neg A_s)$ und im Falle $f(k) = 1$ durch $(A_s \vee \neg A_s)$ ersetzt. In Ψ_f kommen die A_{i_k} (für $1 \leq k \leq n$) nicht mehr vor; die übrigen atomaren Aussagen aus $\mathrm{At}(\Psi) \cap \mathrm{At}(\Phi)$ sind unverändert stehen geblieben. Es gilt also offenbar $\mathrm{At}(\Psi_f) = \mathrm{At}(\Psi) \cap \mathrm{At}(\Phi)$.

1. Behauptung: für jede Abbildung f von $\{1, 2, \ldots, n\}$ in $\{0, 1\}$ gilt: $\{\Psi_f\} \models \Phi$.

Sei dazu F irgendeine Wahrheitswert-Zuordnung mit $F(\Psi_f) = 1$. Sei g die wie folgt definierte Funktion:

$$g(A_j) = \begin{cases} F(A_j) & \text{für alle atomare Ausdrücke } A_j \notin \mathrm{At}(\Psi) - \mathrm{At}(\Phi), \\ f(i) & \text{für alle } A_i \in \mathrm{At}(\Psi) - \mathrm{At}(\Phi). \end{cases}$$

Nach Proposition 2.4 gibt es genau eine Wahrheitswertzuordnung G mit $g \subseteq G$. G und F stimmen auf $\mathrm{At}(\Phi)$, und daher erst recht auf $\mathrm{At}(\Psi) \cap \mathrm{At}(\Phi)$ überein. Die atomaren Ausdrücke A_i aus $\mathrm{At}(\Psi) - \mathrm{At}(\Phi)$ werden unter G genauso bewertet wie die Ausdrücke ($A_s \wedge \neg A_s$) bzw. ($A_s \vee \neg A_s$), die in Ψ_f anstelle von A_i gesetzt wurden. Es gilt also $G(\Psi) = F(\Psi_f)$, also $G(\Psi) = 1$. Nach Voraussetzung gilt $\{\Psi\} \models \Phi$ und wir erhalten daher $G(\Phi) = 1$. Aber F und G stimmen auf $At(\Phi)$ überein, also gilt $G(\Phi) = F(\Phi)$ nach dem Koinzidenz-Theorem 2.5, und somit $F(\Phi) = 1$. Damit ist $\{\Psi_f\} \models \Phi$ bewiesen.

Wir setzen jetzt

$$\Theta \triangleq \bigvee_{f \in \mathcal{M}} \Psi_f$$

wobei $\mathcal{M}$ die Menge aller Abbildungen f von $\{1, 2, \ldots, n\}$ in $\{0, 1\}$ sei. Es gilt dann $At(\Theta) = At(\Psi) \cap At(\Phi)$ und aus der 1. Behauptung folgt sofort $\{\Theta\} \models \Phi$.

<u>2. Behauptung</u>: es gilt. $\{\Psi\} \models \Theta$.

Sei dazu H irgendeine Wahrheitswert-Zuordnung mit $H(\Psi) = 1$. Sei h die wie folgt definierte Funktion: $h(k) = H(A_{i_k})$ für $1 \leq k \leq n$ Offenbar ist dann $H(\Psi_h) = 1$ und daher auch $H(\Theta) = 1$, denn Ψ_h ist ein Disjunktionsglied von Θ. Damit ist alles bewiesen. ❑

In §7 (Satz 7.5) werden wir den folgenden 'Endlichkeits-Satz' beweisen:

> *Sei Σ eine Menge von $\mathcal{L}$-Ausdrücken und $\Phi \in \mathcal{L}$ beliebig. Wenn $\Sigma \models \Phi$, dann gibt es eine endliche Teilmenge Δ von Σ mit $\Delta \models \Phi$.*

Unter Verwendung dieses Satzes können wir den Interpolations-Satz etwas verschärfen.

<u>5.3* Interpolations-Satz</u>: *Sei $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\neg, \rightarrow, \ldots, \curlyvee, \curlywedge)$ eine junktorenlogische Sprache, die auch die Konstanten $\curlyvee$ (das verum) und $\curlywedge$ (das falsum) enthält, und sei Σ eine Menge von $\mathcal{L}$-Ausdrücken und $\Phi \in \mathcal{L}$. Wenn $\Sigma \models \Phi$, dann gibt es einen $\mathcal{L}$-Ausdruck Θ mit den folgenden Eigenschaften:*

(i) $At(\Theta) \subseteq At(\Phi) \cap \bigcup \{At(\Psi) ; \Psi \in \Sigma\}$, *und*

(ii) $\Sigma \models \Theta$ *und* $\{\Theta\} \models \Phi$.

<u>Beweis</u>. Aus $\Sigma \models \Phi$ folgt nach dem oben angegebenen Endlichkeitssatz 7.5 die Existenz einer endlichen Teilmenge Δ von Σ mit $\Delta \models \Phi$. Sei Γ die Konjunktion

aller Ausdrücke, die in Δ liegen. Dann gilt auch $\{\Gamma\} \models \Phi$ und wir können die Interpolations-Sätze 5.2 und 5.3 anwenden. Dabei kann man 5.2 als Spezialfall von 5.3 ansehen, wenn man im Beweis von 5.3 sagt, daß (in der dort benutzten Notation) Ψ_f der $\mathcal{L}$-Ausdruck sei, der aus Ψ entsteht, indem man für jedes k mit $1 \leq k \leq n$, jedes A_{i_k}, überall wo dieses Symbol in Ψ vorkommt,

im Falle $f(k) = 0$ durch das falsum $\curlywedge$, und

im Falle $f(k) = 1$ durch das verum $\curlyvee$

ersetzt. Es gibt also einen interpolierenden $\mathcal{L}$-Ausdruck Θ mit $\{\Gamma\} \models \Theta$ und $\{\Theta\} \models \Phi$. Wegen $\Sigma \models \Gamma$ haben wir auch $\Sigma \models \Theta$. ❑

Literatur

B. Bolzano: *Wissenschaftslehre - Versuch einer ausführlichen und größtentheils neuen Darstellung der Logik.* 4 Bände. Sulzbach 1837.

W. Craig: *Three uses of the Herbrand-Gentzen theorem in relating model theory and proof theory.* Journal of Symbolic Logic Band 22 (1957), pp. 269-285.

— * — * — * —

Übungsaufgaben zu §5

(1) Prüfen Sie, ob die folgenden Aussagen für beliebige $\Sigma \subseteq \mathcal{L}$ und $\Phi, \Psi \in \mathcal{L}$ gültig sind:

(i) Wenn $\Sigma \models \Phi$ oder $\Sigma \models \Psi$, dann auch $\Sigma \models \Phi \vee \Psi$?

(ii) Wenn $\Sigma \models \Phi \vee \Psi$, dann auch $\Sigma \models \Phi$ oder $\Sigma \models \Psi$?

(2) Beweisen Sie, daß für beliebige $\mathcal{L}$-Ausdrücke Φ, Ψ und Θ gilt:

$\Phi \vee \Psi \models \Theta$ genau dann wenn $\Phi \models \Theta$ <u>und</u> $\Psi \models \Theta$.

(3) Für einen $\mathcal{L}$-Ausdruck Ψ mit $\mathrm{At}(\Psi) = \{A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_n}\}$ und eine beliebige Funktion f von $\{1, 2, \ldots, n\}$ in $\{0,1\}$ sei Ψ_f der $\mathcal{L}$-Ausdruck, der aus Ψ entsteht, indem man für jedes k mit $1 \leq k \leq n$, jedes A_{i_k}, überall wo dieses Symbol in Ψ vorkommt, im Falle $f(k) = 0$ durch $(A_1 \wedge \neg A_1)$ und im Falle $f(k) = 1$ durch $(A_1 \vee \neg A_1)$ ersetzt. Sei $\Psi^{\#}$ die Disjunktion all dieser Ausdrücke Ψ_f, wobei f die Menge $\mathcal{M}$ aller Funktionen von $\{1, 2, \ldots, n\}$ in $\{0,1\}$ durchläuft. Es ist $\mathrm{At}(\Psi^{\#}) = \{A_1\}$. Beweisen Sie:

(i) Ψ ist erfüllbar genau dann wenn $\Psi^{\#}$ eine Tautologie ist.

(ii) Ψ ist unerfüllbar genau dann wenn $\Psi^{\#}$ eine Kontradiktion ist.

(4) Seien Φ, Ψ und Θ $\mathcal{L}$-Ausdrücke. Zeigen Sie:

(i) $(\Phi \rightarrow (\Psi \leftrightarrow \Theta)) \mathrel{=}\!\mid\!\models (\Phi \wedge \Psi \leftrightarrow \Phi \wedge \Theta)$.

(ii) $(\neg \Phi \rightarrow (\Psi \leftrightarrow \Theta)) \mathrel{=}\!\mid\!\models (\Phi \vee \Psi \leftrightarrow \Phi \vee \Theta)$

(5) Seien Φ_1, Φ_2 und Ψ $\mathcal{L}$-Ausdrücke und es gelte $\models (\Phi_1 \wedge \Phi_2) \rightarrow \Psi$. Zeigen Sie, daß es Ausdrücke Ψ_1 und Ψ_2 gibt mit $\models \Phi_1 \rightarrow \Psi_1$ und $\models \Phi_2 \rightarrow \Psi_2$ und $\models (\Psi_1 \wedge \Psi_2) \leftrightarrow \Psi$.

(6) Eine Menge $\mathfrak{X}$ von $\mathcal{L}$-Ausdrücken heißt *konsequential-abgeschlossen,* wenn für jeden $\mathcal{L}$-Ausdruck Φ gilt: wenn $\mathfrak{X} \models \Phi$, dann $\Phi \in \mathfrak{X}$.

Beweisen Sie das folgende Sätzchen von A.Lindenbaum (cf. A. Tarski, Werke Band 1, pp.313-320): Es seien $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \ldots, \mathfrak{X}_n$ endlich viele konsequential-abgeschlossene Mengen von $\mathcal{L}$-Ausdrücken und $\mathfrak{X}_i \neq \bigcup \{\mathfrak{X}_k; 1 \leq k \leq n\}$ für alle $1 \leq i \leq n$. Dann ist $\bigcup \{\mathfrak{X}_k; 1 \leq k \leq n\}$ nicht konsequential-abgeschlossen.

§6. *Ein Aussagen-Kalkül*

Wir haben in §5 den Folgerungsbegriff in voller Allgemeinheit definiert. Der Folgerungsbegriff ist auch „richtig“ definiert worden, wie das Export-Import-Theorem zeigt. Allerdings hat diese Art des Folgerns sehr wenig mit dem Beweisen, so wie es in der Mathematik üblich ist, zu tun. Um zu zeigen, daß eine Aussage Φ aus einer Menge Σ von Axiomen (oder Prämissen, Annahmen) folgt, arbeitet man in der Mathematik nicht mit Wahrheitswert-Zuordnungen, sondern mit Schluß-Regeln. Man „folgert“ nicht Φ aus Σ, sondern man leitet Φ aus Σ ab. In einer *Ableitung* (*Herleitung,* oder *Deduktion*) von Φ aus Σ schreibt man einzelne Aussagen untereinander oder hintereinander, wobei eine Aussage nur dann hingeschrieben werden darf, wenn sie eine Prämisse aus Σ ist, oder ein logisches Gesetz (d.h. eine Tautologie), oder unter Verwendung gewisser Schlußregeln aus den vorangegangenen Aussagen geschlossen werden kann. Wenn am Ende einer derartigen Sequenz von Aussagen die behauptete Aussage Φ steht, dann ist die Sequenz eine *Herleitung* (also ein Beweis) von Φ aus Σ.

Wir wollen jetzt versuchen, dem Folgerungs-Begriff einen gleich-starken Deduktions-Begriff gegenüber zu stellen. Es mag dabei überraschend sein, daß wir mit sehr wenigen und auch sehr einfachen Ableitungs-Regeln und logischen Gesetzen auskommen. Wir benötigen nur die beiden Tautologien

$$\Phi \to (\Psi \to \Phi)$$

und

$$(\neg \Psi) \to (\Psi \to \Phi)$$

und die beiden Ableitungs-Regeln:

'modus ponens': von Φ und $\Phi \to \Psi$ darf man zu Ψ übergehen;

'Fallunterscheidung': von $\Phi \to \Psi$ und $(\neg \Phi) \to \Psi$ darf man zu Ψ übergehen.

Es kommen noch zwei einfache kombinatorische Regeln hinzu, die sich auf den Umgang mit den Prämissen einer Ableitung beziehen.

Der **'modus ponens'** (genauer: *modus ponendo ponens*) besagt, daß man in einem Beweis, in dem man bereits Φ und auch $\Phi \to \Psi$ bewiesen hat, auch Ψ als bewiesen ansehen darf. Es handelt sich um eine Schluß-Regel, in der durch 'Setzen' (lat.: ponendo) von Φ auch Ψ (im Schluß-Satz) 'gesetzt' (lat.: ponens) wird.

Die zweite **Regel** formalisiert das übliche Beweis-Verfahren durch Fall-Unterscheidung. Wenn man Ψ beweisen kann, falls Φ gilt, und wenn man Ψ beweisen kann, falls Φ nicht gilt, dann hat man Ψ schlechthin bewiesen.

Wir geben jetzt die exakte Fassung des Begriffes einer Herleitung (d.h. des Deduktions-Begriffes). Dazu geben wir einen Kalkül an, d.h. ein Regelsystem mit rein mechanisch ausführbaren Regeln, mit dessen Hilfe wir schrittweise Beweisfiguren erzeugen können. Eine Beweisfigur ist dabei ein geordnetes Paar, das aus einer endlichen Liste (oder einer endlichen Menge) $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n$ von Prämissen und einer Aussage Φ, die als Konsequenz dieser Prämissen angesehen werden soll, besteht. Diese Beweisfiguren notieren wir als *Sequenzen* (also als Folgen), wobei wir zwischen die Liste der Prämissen und die Konsequenz ein Trennungs-Zeichen setzen. Als Trennungs-Zeichen nehmen wir $\vdash$. Eine Beweisfigur hat also immer die Form $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n \vdash \Phi$, wobei $n = 0$ sein darf (die Liste der Prämissen wäre in diesem Falle leer). Im Folgenden sei $\mathcal{L}$ die junktoren-logische Sprache $\mathcal{L}(\neg, \rightarrow)$.

Ein Aussagen-Kalkül

Regel (R1): Wenn Δ eine endliche Liste von $\mathcal{L}$-Ausdrücken ist und Φ und Ψ beliebige $\mathcal{L}$-Ausdrücke sind, dann darf man die Sequenz $\Delta \vdash \Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Phi)$ hinschreiben.

Regel (R2): Wenn Δ eine endliche Liste von $\mathcal{L}$-Ausdrücken ist und Φ und Ψ beliebige $\mathcal{L}$-Ausdrücke sind, dann darf man die Sequenz $\Delta \vdash (\neg \Psi) \rightarrow (\Psi \rightarrow \Phi)$ hinschreiben.

Regel (R3): Wenn Δ eine endliche Liste von $\mathcal{L}$-Ausdrücken ist und Φ in dieser Liste vorkommt, dann darf man die Sequenz $\Delta \vdash \Phi$ hinschreiben.

Regel (R4), genannt: *Verdünnungs-Regel* Wenn man $\Delta \vdash \Psi$ hinschreiben darf und wenn Σ eine endliche Liste von $\mathcal{L}$-Ausdrücken ist, in der mindestens alle Ausdrücke aus Δ vorkommen, dann darf man auch $\Sigma \vdash \Psi$ hinschreiben.

Regel (R5), genannt *modus ponens:* Wenn Δ eine endliche Liste von $\mathcal{L}$-Ausdrücken ist, Φ und Ψ $\mathcal{L}$-Ausdrücke sind, und wenn man $\Delta \vdash \Phi$ und auch $\Delta \vdash \Phi \rightarrow \Psi$ hinschreiben darf, dann darf man auch $\Delta \vdash \Psi$ hinschreiben.

Regel (R6), genannt *Fallunterscheidung:* Wenn Δ eine endliche Liste von $\mathcal{L}$-Ausdrücken ist und Φ und Ψ beliebige $\mathcal{L}$-Ausdrücke sind, und wenn man $\Delta, \Phi \vdash \Psi$ und auch $\Delta, \neg \Phi \vdash \Psi$ hinschreiben darf, dann darf man auch $\Delta \vdash \Psi$ hinschreiben.

Derartige Kalküle werden nach einem Vorschlag von Ernst Schröder 'Aussagenkalküle' genannt (siehe E. Schröder: *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, Leipzig 1890, Seite 161). Wir schließen uns diesem Vorschlag an.

In Regeln (R6) bezeichnet Δ, Φ die Liste der $\mathcal{L}$-Ausdrücke, die man erhält, wenn man an das Ende der Liste Δ den Ausdruck Φ anhängt.

In der Verdünnungs-Regel (R4) wird nicht verlangt, daß Σ eine Fortsetzung (Verlängerung) der Liste Δ sei. Die Reihenfolge, in der die Ausdrücke aus Δ in der Liste Σ wiederkehren, ist beliebig. Daher fällt die folgende Vertauschungs-Regel unter die Verdünnungs-Regel (R4):

Vertauschungs-Regel (R7):	Wenn man $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n \vdash \Phi$ hinschreiben darf und wenn π eine Permutation der Ziffern 1,2,...,n ist, dann darf man auch $\Psi_{\pi(1)}, \Psi_{\pi(2)}, \ldots, \Psi_{\pi(n)} \vdash \Phi$ hinschreiben.

<u>6.1</u> <u>Lemma</u>: *Wenn Δ eine endliche Liste von $\mathcal{L}$-Ausdrücken und Φ ein beliebiger $\mathcal{L}$-Ausdruck ist, dann darf man die Sequenz $\Delta \vdash \Phi \to \Phi$ hinschreiben.*

<u>Beweis</u>: Wir schreiben einige Sequenzen auf, die wir unter Verwendung der Regeln (R1) bis (R6) hinschreiben dürfen:

(i)	Δ, Φ	$\vdash \Phi \to (\Phi \to \Phi)$	nach (R1),
(ii)	Δ, Φ	$\vdash \Phi$	nach (R3),
(iii)	Δ, Φ	$\vdash \Phi \to \Phi$	aus (i), (ii) mit **modus ponens** (R5),
(iv)	$\Delta, \neg\Phi$	$\vdash (\neg\Phi) \to (\Phi \to \Phi)$	nach (R2),
(v)	$\Delta, \neg\Phi$	$\vdash \neg\Phi$	nach (R3),
(vi)	$\Delta, \neg\Phi$	$\vdash \Phi \to \Phi$	aus (iv), (v) mit **modus ponens**,
(vii)	Δ	$\vdash \Phi \to \Phi$	aus (iii), (vi) mit *Fallunterscheidung*.

Dies zeigt, daß wir $\Delta \vdash \Phi \to \Phi$ hinschreiben dürfen. ❑

<u>6.2</u> <u>Definition.</u> Sei $\Phi \in \mathcal{L}$ und $\Sigma \subseteq \mathcal{L}$. Wir sagen, daß Φ *aus Σ herleitbar ist* [in Zeichen: $\Sigma \vdash \Phi$], wenn es endlich viele $\mathcal{L}$-Ausdrücke $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_m \in \Sigma$ gibt, so daß die Sequenz $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_m \vdash \Phi$ aufgrund der Regeln (R1) bis (R6) des Aussagen-Kalküls hingeschrieben werden darf [Auf die Reihenfolge der Prämissen kommt es dabei nach (R7) nicht an!].

Wir haben in dieser Definition dasselbe Zeichen '$\vdash$' benutzt, das wir auch in den Sequenzen zur Trennung der Prämissen von ihren Konsequenzen verwendet hatten. Nach Regel (R4) ist diese neue Verwendung nur eine Erweiterung der bisherigen Verwendung.

Das Zeichen $\vdash$ geht auf Gottlob Frege zurück und wird „Urteils-Strich" genannt. Frege hatte es 1879 in seiner „Begriffsschrift" eingeführt.

Herleitungen werden wir auch Deduktionen nennen.

Wir haben den Aussagen-Kalkül aufgestellt, um dem Folgerungs-Begriff einen gleichwertigen Deduktions-Begriff gegenüberzustellen. Wir müssen jetzt noch zeigen, daß beide Begriffe gleichwertig sind.

<u>**6.3**</u> <u>**Satz**</u> (Korrektheit des Aussagen-Kalküls) *Sei* $\Phi \in \mathcal{L}$ *und* $\Sigma \subseteq \mathcal{L}$. *Wenn* Φ *aus* Σ *hergeleitet werden kann, dann ist* Φ *auch eine Folgerung aus* Σ, *mit anderen 'Worten':*

$$\textit{wenn}\quad \Sigma \vdash \Phi\,,\ \textit{dann}\quad \Sigma \models \Phi\,.$$

<u>Beweis</u>. 1. Schritt: Wir zeigen zuerst (durch Induktion über die Anzahl der Anwendungen der Kalkül-Regeln), daß für jede Beweis-Figur $\Delta \vdash \Phi$, die aufgrund der Regeln (R1) bis (R6) hingeschrieben werden darf, immer $\Delta \models \Phi$ gilt. Für (R1), (R2), (R3) und (R4) ist dies trivial.

Wir betrachten den **modus ponens** (R5): vorausgesetzt wird in (R5), daß man $\Delta \vdash \Phi$ und $\Delta \vdash \Phi \rightarrow \Psi$ hinschreiben darf. (R5) erlaubt dann auch $\Delta \vdash \Psi$ hinzuschreiben. Nach der Induktions-Annahme ergibt sich aus $\Delta \vdash \Phi$ aber $\Delta \models \Phi$ und aus $\Delta \vdash \Phi \rightarrow \Psi$ auch $\Delta \models \Phi \rightarrow \Psi$. Daraus ergibt sich aber offenbar auch $\Delta \models \Psi$.

Wir betrachten die Regel (R6). Aber auch diese Regel ist offenbar korrekt. Damit ist der 1. Schritt durchgeführt.

2. Schritt: Wenn jetzt Σ eine beliebige Menge von $\mathcal{L}$-Ausdrücken ist für die $\Sigma \vdash \Phi$ gilt, dann gibt es definitionsgemäß (Def. 6.2) eine endliche Teilmenge $\Delta \subseteq \Sigma$ so, daß $\Delta \vdash \Phi$ aufgrund der Regeln (R1) bis (R6) hingeschrieben werden darf. Nach dem Ergebnis des ersten Schrittes gilt dann auch $\Delta \models \Phi$. Wegen $\Delta \subseteq \Sigma$ gibt dann aber erst recht $\Sigma \models \Phi$. ❑

Daß von Satz 6.3 auch die Umkehrung gilt, werden wir im folgenden §7 zeigen. Die Propositionen und Theoreme, die wir in diesem §6 jetzt noch beweisen wollen, werden im Beweis der Umkehrung n i c h t g e b r a u c h t!

Wir beginnen mit einem grundlegenden Satz, der das Auffinden von Deduktionen (d.h. Herleitungen) im Kalkül sehr erleichtert. Es ist das sogenannte 'Deduktions-Theorem', das (für andere Kalküle) zuerst von Alfred Tarski in seiner Arbeit *„Über einige fundamentale Begriffe der Metamathematik"* (Comptes Rendus Soc. Sci. lettr., Warschau, Band 23 (1930)) formuliert wurde (dort als Axiom 7*). Die Bezeichnung „Deduktions-Theorem" geht auf David Hilbert und Paul Bernays (*„Grundlagen der Mathematik"*, Band I (Berlin 1934, p.154) zurück. Es handelt sich um eine Variante des Export-Import-Theorems.

6.4 Deduktions-Theorem *Für beliebige Ausdrücke* $\Phi, \Psi \in \mathcal{L}(\neg, \rightarrow, \ldots)$ *und beliebige endliche Folgen* Σ *von* $\mathcal{L}(\neg, \rightarrow, \ldots)$*-Ausdrücken gilt:*

$$\Sigma \vdash \Phi \rightarrow \Psi \quad \textit{genau dann wenn} \quad \Sigma, \Phi \vdash \Psi .$$

Beweis. Wir beweisen zuerst die Richtung von links nach rechts „$\Rightarrow$":

(i)	$\Sigma \vdash \Phi \rightarrow \Psi$	nach Voraussetzung,
(ii)	$\Sigma, \Phi \vdash \Phi \rightarrow \Psi$	nach (R4),
(iii)	$\Sigma, \Phi \vdash \Phi$	nach (R3),
(iv)	$\Sigma, \Phi \vdash \Psi$	aus (ii) und (iii) mit **modus ponens.**

Umkehrung „$\Leftarrow$":

(j)	$\Sigma, \Phi \vdash \Psi$	nach Voraussetzung,
(jj)	$\Sigma, \Phi \vdash \Psi \rightarrow (\Phi \rightarrow \Psi)$	nach (R1),
(jjj)	$\Sigma, \Phi \vdash \Phi \rightarrow \Psi$	aus (j) und (jj) mit **modus ponens,**
(jv)	$\Sigma, \neg\Phi \vdash (\neg\Phi)$	nach (R3),
(v)	$\Sigma, \neg\Phi \vdash (\neg\Phi) \rightarrow (\Phi \rightarrow \Psi)$	nach (R2),
(vj)	$\Sigma, \neg\Phi \vdash \Phi \rightarrow \Psi$	aus (jv) und (v) mit **modus ponens,**
(vjj)	$\Sigma \vdash \Phi \rightarrow \Psi$	aus (jjj), (vj) mit Fallunterscheidung.

Damit ist alles bewiesen. ❑

6.5 Proposition. *Für beliebige Ausdrücke* $\Phi \in \mathcal{L} = \mathcal{L}(\neg, \rightarrow, \ldots)$ *gilt:*

(a) $\vdash (\neg\neg\Phi) \rightarrow \Phi$,

(b) $\vdash \Phi \rightarrow (\neg\neg\Phi)$.

Beweis für (a):

(i)	$\vdash (\neg\neg\Phi) \rightarrow ((\neg\Phi) \rightarrow \Phi)$	nach (R2),
(ii)	$\neg\neg\Phi, \neg\Phi \vdash \Phi$	aus (i) mit zweifacher Anwendung des Deduktionstheorems 6.4,
(iii)	$\neg\Phi, \neg\neg\Phi \vdash \Phi$	aus (ii) mit (R4) [genauer (R7)],

(iv)	$\neg\Phi \vdash (\neg\neg\Phi) \to \Phi$	aus (iii) mit dem Deduktionstheorem,
(v)	$\vdash \Phi \to ((\neg\neg\Phi) \to \Phi)$	nach (R1),
(vi)	$\Phi \vdash (\neg\neg\Phi) \to \Phi$	aus (v) mit dem Deduktionstheorem,
(vii)	$\vdash (\neg\neg\Phi) \to \Phi$	aus (iv),(vi) mit Fallunterscheidung.

Beweis für (b):

(j)	$\vdash (\neg\neg\Phi) \to (\Phi \to (\neg\neg\Phi))$	nach (R1),
(jj)	$\neg\neg\Phi \vdash \Phi \to (\neg\neg\Phi)$	aus (j) mit dem Deduktionstheorem,
(jjj)	$\vdash (\neg\Phi) \to (\Phi \to \neg\neg\Phi)$	nach (R2) mit $\Psi \mathrel{\hat{=}} \neg\neg\Phi$,
(jv)	$\neg\Phi \vdash \Phi \to (\neg\neg\Phi)$	aus (jjj) mit dem Deduktionstheorem,
(v)	$\vdash \Phi \to (\neg\neg\Phi)$	aus (jj), (jv) mit (R6). ❑

6.6 Proposition. *Für beliebige Ausdrücke* $\Phi, \Psi \in \mathcal{L}(\neg, \to, \dots)$ *gilt:*

$$\vdash (\Phi \to \Psi) \to (\neg\Psi \to \neg\Phi)$$

Beweis. Nach dem Deduktionstheorem genügt es, $\Phi \to \Psi, \neg\Psi \vdash \neg\Phi$ zu zeigen. Wir beginnen jedoch mit einer etwas größeren Menge von Prämissen:

(i)	$\Phi \to \Psi, \neg\Psi, \Phi \vdash \Phi$	nach (R3),
(ii)	$\Phi \to \Psi, \neg\Psi, \Phi \vdash \Phi \to \Psi$	nach (R3),
(iii)	$\Phi \to \Psi, \neg\Psi, \Phi \vdash \Psi$	aus (i), (ii) mit **modus ponens**,
(iv)	$\Phi \to \Psi, \neg\Psi, \Phi \vdash \neg\Psi$	nach (R3),
(v)	$\Phi \to \Psi, \neg\Psi, \Phi \vdash (\neg\Psi) \to (\Psi \to \neg\Phi)$	nach (R2),
(vi)	$\Phi \to \Psi, \neg\Psi, \Phi \vdash \Psi \to \neg\Phi$	aus (iv), (v) mit **modus ponens**,
(vii)	$\Phi \to \Psi, \neg\Psi, \Phi \vdash \neg\Phi$	aus (iii), (vi) mit modus ponens,
(viii)	$\Phi \to \Psi, \neg\Psi, \neg\Phi \vdash \neg\Phi$	nach (R3),
(ix)	$\Phi \to \Psi, \neg\Psi \vdash \neg\Phi$	aus (vii), (viii) mit (R6),

und daraus folgt mit dem Deduktions-Theorem 6.4 die Behauptung. ❑

6.7 Proposition. *Für beliebige Ausdrücke* $\Phi, \Psi, \Theta \in \mathcal{L}(\neg, \to, \dots)$ *gilt die folgende Distributions-Regel:*

$$\vdash (\Phi \to (\Psi \to \Theta)) \to ((\Phi \to \Psi) \to (\Phi \to \Theta)).$$

Beweis. Nach dem Deduktionstheorem 6.4 genügt es,

$$\Phi \to (\Psi \to \Theta), \Phi \to \Psi, \Phi \vdash \Theta$$

zu zeigen. Wir beginnen daher wie folgt:

(i) $\Phi \to (\Psi \to \Theta), \Phi \to \Psi, \Phi \vdash \Phi$ nach (R3),

(ii) $\Phi \to (\Psi \to \Theta), \Phi \to \Psi, \Phi \vdash \Phi \to \Psi$ nach (R3),

(iii) $\Phi \to (\Psi \to \Theta), \Phi \to \Psi, \Phi \vdash \Psi$ aus (i),(ii) mit **modus ponens**,

(iv) $\Phi \to (\Psi \to \Theta), \Phi \to \Psi, \Phi \vdash \Phi \to (\Psi \to \Theta)$ nach (R3),

(v) $\Phi \to (\Psi \to \Theta), \Phi \to \Psi, \Phi \vdash \Psi \to \Theta$ aus (i),(iv) mit modus ponens,

(vi) $\Phi \to (\Psi \to \Theta), \Phi \to \Psi, \Phi \vdash \Theta$ aus (iii),(v) mit modus ponens.

Eine dreifache Anwendung des Deduktions-Theorems liefert die Behauptung. ❑

Historische Bemerkungen.

¶ Einen Deduktions-Kalkül für die Aussagen-Logik hat zuerst Gottlob Frege 1879 in seiner „Begriffsschrift" aufgestellt. Frege geht von sechs Tautologien und einer einzigen Schluß-Regel, dem **modus ponens**, aus. Die sechs Tautologien sind (in der Fregeschen Numerierung):

(§1) $\Phi \to (\Psi \to \Phi)$,

(§2) $(\Theta \to (\Psi \to \Phi)) \to ((\Theta \to \Psi) \to (\Theta \to \Phi))$,

(§8) $(\Theta \to (\Psi \to \Phi)) \to (\Psi \to (\Theta \to \Phi))$,

(§28) $(\Psi \to \Phi) \to (\neg \Phi \to \neg \Psi)$,

(§31) $(\neg\neg \Phi) \to \Phi$,

(§41) $\Phi \to (\neg\neg \Phi)$.

Nach Łukasiewicz (1929) ist die dritte Tautologie (§8) entbehrlich, weil sie aus den übrigen ableitbar ist. Frege gibt für viele weitere Tautologien Herleitungen in seinem Kalkül (den Kettenschluß beweist er auf Seite 35, die Tautologie $(\neg \Phi) \to (\Phi \to \Psi)$ auf Seite 45, etc).

6.8 Satz. *Jeder Ausdruck, der im Fregeschen Kalkül herleitbar ist, ist auch in unserem Aussagenkalkül herleitbar.* [Zusatz: Nach dem Vollständigkeits-Satz, den wir in §7 beweisen werden, gilt davon auch die Umkehrung].

Beweis. Die Axiome (§1), (§2), (§28), (§31) und (§41) von Freges Kalkül stehen nach Regel (R1) und den Propositionen 6.5(a),(b), 6.6 und 6.7 auch in unserem Ableitungs-Kalkül zur Verfügung. Der **modus ponens** ist in beiden Kalkülen verfügbar. Jede Herleitung einer Aussage in Freges Kalkül ist daher auch eine Herleitung in dem von uns angegebenen Kalkül. ❑

¶ Alfred Tarski erwähnt in seinem Essay „*Untersuchungen über den Aussagenkalkül*“ (Comptes rendus des séances de la Soc.Sci. et lettr.de Varsovie, Band 23(1930), pp.30-50) den folgenden Aussagen-Kalkül von Jan Łukasiewicz, der von drei Tautologien

(L 1) $(\neg\Phi \to \Phi) \to \Phi$,

(L 2) $\Phi \to (\neg\Phi \to \Psi)$,

(L 3) $(\Phi \to \Psi) \to ((\Psi \to \Theta) \to (\Phi \to \Theta))$.

und dem **modus ponens** als einziger Schluß-Regel ausgeht. Hier sind die vorausgesetzen Tautologien (L1), (L2) und (L3) zwar sehr einfach, aber das Herleiten ist etwas mühsam.

¶ J.G.P.Nicod hat einen Aussagen-Kalkül angegeben, der nur auf einer einzigen Tautologie und einer einzigen Schlußregel beruht. Er betrachtet die Junktoren-logische Sprache $\mathcal{L}(\mid)$, deren einziger Junktor der Sheffer-Strich ist. Nicod verwendet die Tautologie (von Nicod „the Prop“ genannt):

$$(\Phi\mid(\Psi\mid\Theta))\Big|\Big((T\mid(T\mid T))\mid\big((\Gamma\mid\Psi)\mid((\Phi\mid\Gamma)\mid(\Phi\mid\Gamma))\big)\Big)$$

und die folgende Schluß-Regel (von Nicod „the rule“ genannt):

von Φ und $\Phi\mid(\Psi\mid\Theta)$ darf man zu Θ übergehen.
(in die Sprache $\mathcal{L}(\to,\wedge,\ldots)$ übersetzt: von Φ und $\Phi \to (\Psi\wedge\Theta)$ darf man zu Θ übergehen).

Diese Schluß-Regel ist stärker als der **modus ponens**, da in einem Schritt zwei Ausdrücke elimiert werden können. - Siehe Seite 35 in:

Jean Nicod: *A reduction in the number of the primitive propositions of logic,* Proceedings of the Cambridge Phi. Soc., Band 19 (1917), pp.32-41, eingegangen am 30. Okt. 1916.

¶ Der von uns vorgeschlagene Kalkül ist von Gerhard Gentzens Sequenzen-Kalkül aus den Jahren 1934 und 1938 etwas beeinflußt. Er hat zwei Tautologien, zwei kombinatorische Regeln und zwei Schluß-Regeln (**modus ponens** und 'Fallunterscheidung'). Im **modus ponens** wird *rechts* vom Urteilsstrich $\vdash$ und in der Fallunterscheidungs-Regel *links* vom Urteilsstrich $\vdash$ ein Ausdruck eliminiert. Von den verwendeten Tautologien entsteht $(\neg\Phi) \to (\Phi \to \Psi)$ aus $\Phi \to (\Psi \to \Phi)$, indem man $(\Psi \to \Phi)$ durch die Kontraposition $(\neg\Phi \to \neg\Psi)$ ersetzt. Es wurde jedoch $(\neg\Phi) \to (\Phi \to \neg\Psi)$ und nicht $\Phi \to (\neg\Phi \to \neg\Psi)$ verwendet, weil es darauf ankommt, in Herleitungen Negations-Zeichen abbauen zu können. Aber Ψ ist hier beliebig und daher kann $\neg\Psi$ durch Ψ ersetzt werden.

Durch die Forderung der Gültigkeit von $\Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Phi)$ und $(\neg\Psi) \rightarrow (\Psi \rightarrow \Phi)$ werden (in Gegenwart der übrigen Regeln des Kalküls) das Negations-Zeichen und der Implikations-Pfeil (implizit) definiert, denn die erste Formel besagt, daß $\Psi \rightarrow \Phi$ wahr ist, wenn das Sukzedenz Φ wahr ist, und die zweite Formel besagt, daß $\Psi \rightarrow \Phi$ wahr ist, wenn das Antezedenz Ψ falsch ist.

Bemerkungen zum modus ponens. Alle Kalküle verwenden den modus ponens. Es handelt sich hier um eine Regel, die schon in der Antike in der Megarisch-Stoischen Schule bekannt war (vergl. Sextus Empiricus: *Pyrrh. Hyp.* ii,157f, und *Adv.Math.* viii, 224f). Apuleius von Madaura (er lebte von etwa 125 bis 175?) umschrieb in seinem Buch *„Peri Hermeneias"* (Abschnitt 13) den modus ponens wie folgt:

> *„Stoici .... pro litteris numeros usurpant, ut: si primum, secundum; atqui primum, secundum igitur".*
>
> „Die Stoiker benutzen Zahlen anstelle von Buchstaben, beispielsweise so: wenn das Erste, dann das Zweite; aber es gilt das Erste, also gilt auch das Zweite."

Apuleius gab in dieser Schrift (Abschnitt 7) auch das oft zitierte Beispiel:

„Si dies est, lucet;	Wenn es Tag ist, ist es hell;
atqui dies est;	Nun ist es aber Tag;
lucet igitur."	also ist es hell.

Ein hübscheres Beispiel kann man in dem Theater-Stück *'Der Kontrabaß'* von Patrick Süskind finden (1980, Uraufführung im Cuvilliés Theater München am 22.9.1981). Der Kontrabassist spricht dort:

> *„Also ich sage Ihnen, diese Sängerin, ... sie heißt übrigens Sarah, ich sage Ihnen, die kommt einmal ganz groß raus. Wenn ich was verstehe von Musik, und ich verstehe etwas davon, dann kommt die ganz groß raus."*

Es geht um die Behauptung, daß Sarah ganz groß heraus kommen wird. Der Beweis wird nachgeliefert: (1) 'Wenn ich was von Musik verstehe, dann kommt sie ganz groß heraus' und (2) 'Ich verstehe was von Musik'. Eine perfekte Anwendung des modus ponens!

Bemerkungen zur Regel (R6). Diese Schluß-Regel hat wohl erst Gerhard Gentzen 1934 in seiner Arbeit *„Untersuchungen über das logische Schließen"* (Math. Zeitschrift, Band 39 (1934), pp. 176-210 und 405-431) explizit formuliert. In mathematischen Beweisen waren Beweise durch Fall-Unterscheidung schon lange in Gebrauch, aber dieses Verfahren war vorher nie explizit als Schluß-Regel formuliert worden.

Bemerkungen zur Terminologie: Eine *logische Folgerung* wird auch als *Schluss* (Konklusion) bezeichnet. Das Wort 'schliessen' (lat.: conclūdere) hat dabei die eigentliche Bedeutung von „abschließen, einsperren, begrenzen

(beenden), auf engem Raum zusammenfassen, in ein geschlossenes Ganzes bringen". Daraus ergab sich in der Rhetorik die Bedeutung, daß ein 'Schluss' diejenige Aussage ist, die auf engem Raum das zusammenfaßt, was vorher in aller Ausführlichkeit und allen Einzelheiten dargelegt wurde. Ein 'Schluss' beendet die Argumentationskette.
Bei Cicero wird der logische Schluß mit dem Wort *ratiocinatio* wiedergegeben. Das Wort ist aus *ratio* und *notio* zusammensetzt. Aristoteles hatte den logischen Schluß mit dem Wort συμπέρασμα bezeichnet. Dabei hat das Verb συμπεραίνειν die eigentliche Bedeutung von „zusammen zustandebringen".

Literatur

Gottlob Frege: *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens.* Halle an der Saale, 1879.

Gerhard Gentzen: *Untersuchungen über das logische Schließen.* Mathematische Zeitschrift 39 (1934), pp.176-210 und pp.405-431.

Übungsaufgaben zu §6

(1) Zeigen Sie die Gültigkeit des folgenden *Kettenschlusses:*

Wenn $\Sigma \vdash \Phi \to \Psi$ und $\Delta \vdash \Psi \to \Theta$, dann $\Sigma , \Delta \vdash \Phi \to \Theta$.

(2) *Zeigen Sie: für beliebige Ausdrücke* $\Phi, \Psi \in \mathcal{L}(\neg, \to, \dots)$ *das folgende Prinzip der* reductio ad absurdum *gilt:*

$$\vdash (\Phi \to \Psi) \to ((\Phi \to \neg \Psi) \to \neg \Phi).$$

(3) *Seien* Φ *und* Ψ $\mathcal{L}(\neg, \to)$*-Ausdrücke. Geben Sie Herleitungen für die folgenden Kontrapositions-Regeln:*

(a) $\vdash (\neg \Psi \to \neg \Phi) \to (\Phi \to \Psi)$,

(b) $\vdash \Phi \to ((\neg \Psi) \to \neg (\Phi \to \Psi))$.

(4) *Seien* Φ *und* Ψ $\mathcal{L}(\neg, \to)$*-Ausdrücke. Geben Sie eine Herleitung der Peirce'schen Formel (vergleiche Aufgabe 3 in §4):*

$$\vdash \big((\Phi \to \Psi) \to \Phi) \to \Phi\big).$$

(5) *Sei* Φ *ein* $\mathcal{L}(\neg, \to)$*-Ausdruck. Geben Sie eine Herleitung der folgenden Formel:*

$$\vdash \neg \big((\Phi \to \Phi) \to \neg (\Phi \to \Phi)\big).$$

§7. *Der Vollständigkeitssatz*

Das Hauptresultat in diesem §7 ist der Beweis des Satzes „wenn $\Sigma \models \Phi$, dann $\Sigma \vdash \Phi$ ". Für jede Folgerung Φ aus Σ gibt es demnach im Aussagenkalkül auch eine Herleitung. Der Aussagenkalkül ist also reichhaltig genug, um für jede Folgerung auch eine Herleitung zu ermöglichen. Man sagt daher auch, daß der Aussagenkalkül vollständig sei, und der Satz „wenn $\Sigma \models \Phi$, dann $\Sigma \vdash \Phi$ " wird als 'Vollständigkeits-Satz' bezeichnet. Im Anschluß daran beweisen wir einen Kompaktheits-Satz.

— * — * — * —

Das Prinzip „**ex falso quodlibet**" (aus dem Falschen folgt alles) führt uns zu der folgenden Definition.

Definition. Eine Menge Σ von $\mathcal{L}$-Ausdrücken heißt *widerspruchsvoll* (oder auch *inkonsistent*), wenn $\Sigma \vdash \Phi$ für jeden $\mathcal{L}$-Ausdruck Φ gilt.

Eine Menge Σ von $\mathcal{L}$-Ausdrücken heißt *widerspruchsfrei* (oder auch *konsistent*), wenn es wenigstens einen $\mathcal{L}$-Ausdruck gibt, der aus Σ nicht herleitbar ist.

Das Wort „Konsistenz" kommt aus dem Lateinischen und ist aus *con* (=mit, zusammen) und sistĕre (=stehen, bestehen, fest zusammenhalten) zusammengesetzt. Das Wort „Konsistenz" bedeutet demnach „Zusammenstellbarkeit", oder „Fähigkeit, zusammen zu bestehen", „Fähigkeit, miteinander in Harmonie zu stehen". Eine Menge Σ von $\mathcal{L}$-Ausdrücken wird *konsistent* genannt, wenn alle Sätze von Σ „miteinander bestehen" können, wenn es also nicht möglich ist, auf der Grundlage von Σ zwei sich widersprechende Ausdrücke zu beweisen.

Im Folgenden sei $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\neg, \rightarrow)$.

7.1 Lemma: *Sei $\Phi \in \mathcal{L}$ und $\Sigma \subseteq \mathcal{L}$. Wenn Σ widerspruchsfrei ist, dann ist auch mindestens eine der beiden Mengen, $\Sigma \cup \{\Phi\}$ oder $\Sigma \cup \{\neg\Phi\}$, widerspruchsfrei.*

Beweis. Angenommen, beide Mengen wären widerspruchsvoll. Sei $\Theta \in \mathcal{L}$ beliebig. Dann ist $\Sigma \cup \{\Phi\} \vdash \Theta$ und $\Sigma \cup \{\neg\Phi\} \vdash \Theta$. Nach der Regel (R6) von der „Fallunterscheidung" und Definition 6.2 wäre dann auch $\Sigma \vdash \Theta$. Da aber Θ beliebig war, hieße das, daß jeder $\mathcal{L}$-Ausdruck aus Σ herleitbar wäre und Σ wäre widerspruchsvoll, im Gegensatz zur Annahme. ❑

__7.2 Proposition__. *Für jede Menge Σ von $\mathcal{L}$-Ausdrücken sind äquivalent:*

(i) *Σ ist widerspruchsvoll;*

(ii) *es gibt ein $\Theta \in \mathcal{L}$ mit $\Sigma \vdash \Theta$ und $\Sigma \vdash \neg\Theta$.*

__Beweis__. (i) $\Rightarrow$ (ii) ist banal, denn es gilt sogar $\Sigma \vdash \Phi$ für alle $\mathcal{L}$-Ausdrücke Φ.

Umkehrung: (ii) $\Rightarrow$ (i): Sei Ψ beliebig. Wir müssen $\Sigma \vdash \Psi$ beweisen. Nach Voraussetzung gibt es ein $\Theta \in \mathcal{L}$ mit $\Sigma \vdash \Theta$ und $\Sigma \vdash \neg\Theta$. Nach Regel (R2) des Aussagen-Kalkül (§6) (und Definition 6.2) gilt $\Sigma \vdash (\neg\Theta) \rightarrow (\Theta \rightarrow \Psi)$. Zweimalige Anwendung des modus ponens liefert $\Sigma \vdash \Psi$. ❑

__7.3 Lemma__: *Jede widerspruchsfreie Menge Σ von $\mathcal{L}$-Ausdrücken kann zu einer widerspruchsfreien Menge Σ^* erweitert werden, $\Sigma^* \subseteq \mathcal{L}$, so daß zusätzlich gilt:*

(i) *Für jeden $\mathcal{L}$-Ausdruck Θ gilt entweder $\Theta \in \Sigma^*$ oder $(\neg\Theta) \in \Sigma^*$;*

(ii) *Für jeden $\mathcal{L}$-Ausdruck Θ* gilt: *$\Theta \in \Sigma^*$ genau dann wenn $\Sigma^* \vdash \Theta$.*

__Beweis__. Nach Proposition 2.3 ist $\mathcal{L}$ abzählbar, also etwa $\mathcal{L} = \{\Psi_n;\ 1 \leq n \in \mathbb{N}\}$. Wir definieren durch Rekursion Mengen Σ_n wie folgt. Setze $\Sigma_1 = \Sigma$. Wenn Σ_n bereits definiert ist, dann sei

$$\Sigma_{n+1} = \begin{cases} \Sigma_n \cup \{\Psi_n\} & \text{falls } \Sigma_n \cup \{\Psi_n\} \text{ widerspruchsfrei ist,} \\ \Sigma_n \cup \{\neg\Psi_n\} & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

Aus Lemma 7.1 folgt auf induktivem Wege, daß alle Mengen Σ_n (für $1 \leq n \in \mathbb{N}$) widerspruchsfrei sind. Wir setzen:

$$\Sigma^* = \bigcup \{\Sigma_n;\ 1 \leq n \in \mathbb{N}\}.$$

Wäre Σ^* widerspruchsvoll, dann gäbe es nach Proposition 7.2 einen $\mathcal{L}$-Ausdruck Θ mit $\Sigma^* \vdash \Theta$ und $\Sigma^* \vdash \neg\Theta$. Nach der Definition des Herleitbarkeits-Begriffes (Def. 6.2) gibt es endliche Listen Δ_1 und Δ_2 so, daß $\Delta_1 \vdash \Theta$ und $\Delta_2 \vdash \neg\Theta$. Wähle $k \in \mathbb{N}$ so, daß $\Delta_1 \subseteq \Sigma_k$ und $\Delta_2 \subseteq \Sigma_k$. Dann gilt nach Def.6.2 auch $\Sigma_k \vdash \Theta$ und $\Sigma_k \vdash \neg\Theta$. Nach Proposition 7.2 wäre Σ_k inkonsistent, ein Widerspruch! Damit haben wir gezeigt, daß Σ^* doch widerspruchsfrei ist.

Die Behauptung (i) ist nach Konstruktion und Proposition 2.3 klar. Für irgendeinen $\mathcal{L}$-Ausdruck Ψ können aber nach Proposition 7.2 nicht sowohl Ψ als auch $\neg\Psi$ in Σ^* liegen, denn Σ^* ist widerspruchsfrei.

Wir beweisen (ii): Wenn $\Theta \in \Sigma^*$, dann ist $\Sigma^* \vdash \Theta$ nach (R3) klar. Sei umgekehrt $\Sigma^* \vdash \Theta$ angenommen. Wenn dann $\Theta \notin \Sigma^*$ gelten sollte, dann hätten wir nach (i) $(\neg\Theta) \in \Sigma^*$, also $\Sigma^* \vdash \neg\Theta$ nach (R3). Dann wäre aber Σ^* nach Lemma 7.2 widerspruchsvoll. Aus $\Sigma^* \vdash \Theta$ muß also doch $\Theta \in \Sigma^*$ folgen. ❑

Wir können jetzt die Umkehrung des Korrektheitssatzes 6.3 zeigen:

„wenn $\Sigma \models \Phi$, dann $\Sigma \vdash \Phi$".

Wie wir schon zu Beginn von §7 gesagt hatten, drückt dies die Vollständigkeit unseres Kalküls aus: jede Folgerung Φ aus Σ kann auch aus Σ hergeleitet werden. Ein solcher Vollständigkeits-Satz wurde für den Fregeschen Aussagen-Kalkül zuerst von Paul Bernays 1918 in seiner Göttinger Habilitations-Schrift vorgelegt. Unabhängig von Bernays hat auch Emil Post 1921 (Amer. J. Math. 43 (1921), pp.163-185) die Vollständigkeit des Fregeschen Aussagenkalküls bewiesen. Weitere Beweise gaben etwas später auch L. Kalmár (Acta Sci. Math. 7 (1935), pp.222-243) und W. Quine (J.Symbolic Logic 3 (1938), pp.37-40). Für unseren Kalkül läßt sich ein etwas kürzerer Beweis geben.

7.4 Vollständigkeitssatz: *Sei Σ eine beliebige Menge von $\mathcal{L}$-Ausdrücken und Φ ein beliebiger $\mathcal{L}$-Ausdruck. Wenn $\Sigma \models \Phi$, dann gilt auch $\Sigma \vdash \Phi$.*

Beweis. Wir nehmen $\Sigma \models \Phi$ an. Angenommen, Φ wäre nicht aus Σ herleitbar. Dann ist Σ definitionsgemäß widerspruchsfrei.

1. Behauptung: $\Sigma \cup \{\neg\Phi\}$ ist widerspruchsfrei.

Andernfalls könnte man aus $\Sigma \cup \{\neg\Phi\}$ alles herleiten, insbesondere auch Φ, also $\Sigma \cup \{\neg\Phi\} \vdash \Phi$. Nach Regel (R3) und 6.2 haben wir auch $\Sigma \cup \{\Phi\} \vdash \Phi$, so daß nach der Regel (R6) $\Sigma \vdash \Phi$ folgt, im Widerspruch zur Annahme.

Nach Lemma 7.3 gibt es eine maximale widerspruchsfreie Menge Σ^* mit $\Sigma \cup \{\neg\Phi\} \subseteq \Sigma^* \subseteq \mathcal{L}$ und den dort angegebenen Eigenschaften (i) und (ii). Damit definieren wir eine Abbildung F von $\mathcal{L}$ in $\{0,1\}$ wie folgt: für $\Theta \in \mathcal{L}$ sei

$$F(\Theta) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \Theta \in \Sigma^*, \\ 0, & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

2. Behauptung: F ist eine Wahrheitswert-Zuordnung:

Nach Lemma 7.3(i) ist zunächst klar, daß für alle $\Gamma \in \mathcal{L}$ stets $F(\neg\Gamma) = 1 - F(\Gamma)$ gilt. Wir zeigen, daß auch $F(\Psi \to \Theta) = \mathrm{Max}\{1 - F(\Psi),\ F(\Theta)\}$ gilt. Dazu müssen wir

($\star$) $\qquad (\Psi \in \Sigma^* \;\&\; \Theta \notin \Sigma^*) \Leftrightarrow (\Psi \to \Theta) \notin \Sigma^*$

zeigen. Zu „$\Rightarrow$“: Wir setzen $\Psi \in \Sigma^* \;\&\; \Theta \notin \Sigma^*$ voraus. Angenommen, es wäre $(\Psi \to \Theta) \in \Sigma^*$. Nach Regel (R3) hätten wir $\Sigma^* \vdash \Psi$ und $\Sigma^* \vdash \Psi \to \Theta$. Mit dem modus ponens ergäbe sich $\Sigma^* \vdash \Theta$, also $\Theta \in \Sigma^*$ nach Lemma 7.3(ii) im Widerspruch zur Voraussetzung.

Zu „$\Leftarrow$“: Wir setzen jetzt $(\Psi \to \Theta) \notin \Sigma^*$ voraus. Dann muß $\Psi \in \Sigma^*$ gelten, denn andernfalls wäre $\Psi \notin \Sigma^*$, also nach 7.3(i) $(\neg\Psi) \in \Sigma^*$, und daher $\Sigma^* \vdash \neg\Psi$ nach (R3). Nach (R2) ist $\Sigma^* \vdash (\neg\Psi) \to (\Psi \to \Theta)$, also mit modus ponens $\Sigma^* \vdash \Psi \to \Theta$, und daher $(\Psi \to \Theta) \in \Sigma^*$ nach 7.3(ii), im Widerspruch zur Voraussetzung. Das zeigt, daß also doch $\Psi \in \Sigma^*$ gelten muß.

Es muß dann aber auch $\Theta \notin \Sigma^*$ gelten, denn sonst wäre $\Theta \in \Sigma^*$, also nach (R3): $\Sigma^* \vdash \Theta$. Wegen (R1) $\Sigma^* \vdash \Theta \to (\Psi \to \Theta)$ würde der modus ponens $\Sigma^* \vdash (\Psi \to \Theta)$ liefern, also $(\Psi \to \Theta) \in \Sigma^*$ nach 7.3(ii), im Widerspruch zur Voraussetzung. Damit ist ($\star$) und auch die 2. Behauptung bewiesen.

Wegen $\Sigma \cup \{\neg\Phi\} \subseteq \Sigma^*$ gilt $F(\Gamma) = 1$ für alle $\Gamma \in \Sigma$ und $F(\neg\Phi) = 1$, also $F(\Phi) = 0$. Das widerspricht $\Sigma \models \Phi$. Die Annahme der Nicht-Herleitbarkeit von Φ aus Σ ist also zu verwerfen. ❑

<u>**7.5**</u> <u>**Satz**</u> (Endlichkeits-Satz): *Sei Σ eine Menge von $\mathcal{L}$-Ausdrücken und* $\Phi \in \mathcal{L}$ beliebig. Wenn $\Sigma \models \Phi$, *dann gibt es eine endliche Teilmenge Δ von Σ mit $\Delta \models \Phi$.*

<u>Beweis</u>. Wir nehmen $\Sigma \models \Phi$ an. Nach Satz 7.4 gilt dann $\Sigma \vdash \Phi$ und das heißt nach Definition 6.2, daß es eine endliche Teilmenge $\Delta \subseteq \Sigma$ gibt mit $\Delta \vdash \Phi$. Nach Satz 6.3 gilt dann aber auch $\Delta \models \Phi$. ❑

Aus dem Vollständigkeits-Satz ergibt sich auch noch sehr schnell die Äquivalenz der Begriffe *'Erfüllbarkeit'* (siehe §5) und *'Widerspruchsfreiheit'*. Dabei können wir sogar noch etwas mehr zeigen, nämlich daß auch die Begriffe der *'Erfüllbarkeit'* und der *'endlichen Erfüllbarkeit'* äquivalent sind. Der Begriff der 'Widerspruchsfreiheit' bezieht sich auf den Begriff der Herleitung (Deduktion) und ist insofern ein *syntaktischer Begriff.* Die Begriffe der 'Erfüllbarkeit' und der 'endlichen Erfüllbarkeit' beziehen sich auf den Folgerungs-Begriff und sind daher *semantische Begriffe.*

Definition. Eine Menge von $\mathcal{L}$-Ausdrücken heißt *endlich-erfüllbar,* wenn jede endliche Teilmenge von erfüllbar ist.

<u>7.6</u> **<u>Satz</u>** (Kompaktheits-Satz): *Sei* Σ *eine beliebige Menge von* $\mathcal{L}$-*Ausdrücken. Dann sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:*

(i) Σ *ist widerspruchsfrei;*

(ii) Σ *ist erfüllbar;*

(iii) Σ *ist endlich-erfüllbar.*

<u>Beweis</u>. Die Gültigkeit der Implikation (i) $\Rightarrow$ (ii) wurde im Beweis des Vollständigkeits-Satzes gezeigt. Die Implikation (ii) $\Rightarrow$ (iii) ist banal. Wir müssen also nur noch die Implikation (iii) $\Rightarrow$ (i) beweisen. Sei Σ endlich-erfüllbar. Wenn Σ widerspruchsvoll wäre, dann gäbe es nach Lemma 7.2 ein $\Theta \in \mathcal{L}$ mit $\Sigma \vdash \Theta$ und $\Sigma \vdash \neg\Theta$. Gemäß Definition 6.2 gibt es endliche Teilmengen $\Delta_1 \subseteq \Sigma$ und $\Delta_2 \subseteq \Sigma$ mit $\Delta_1 \vdash \Theta$ und $\Delta_2 \vdash \neg\Theta$. Nach dem Korrektheits-Satz 6.3 hätten wir dann auch $\Delta_1 \cup \Delta_2 \models \Theta$ sowie $\Delta_1 \cup \Delta_2 \models \neg\Theta$. Diese endliche Menge $\Delta_1 \cup \Delta_2$ kann offenbar nicht erfüllbar sein, ein Widerspruch! Also muß Σ doch widerspruchsfrei sein. ❑

Satz 7.6 wird 'Kompaktheitssatz' genannt, weil er letztlich die Aussage macht, daß der „topologische Raum“ $2^{\mathbb{N}}$ (das ist der Raum aller Wahrheitswert-Zuordnungen F von $\{A_n;\ 1 \leq n \in \mathbb{N}\}$ in $2 = \{0,1\}$) ein „kompakter“ Raum ist (dies kommt in der Äquivalenz (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) zum Ausdruck). Diese Tatsache kann man natürlich auch aus dem Tychonoffschen Produktsatz ableiten, denn $2^{\mathbb{N}}$ ist das Produkt von abzählbar-unendlich vielen Kopien des endlichen, diskreten (also auch kompakten) Raumes $2 = \{0,1\}$. Nach dem Tychonoffschen Produkt-Satz ist sogar für jede beliebige nicht-leere Menge I der Produkt-Raum 2^I kompakt. Dies zeigt, daß der Kompaktheits-Satz 7.6 auch für Sprachen gilt, die ausgehend von beliebigen Mengen $\{A_i;\ i \in I\}$ von atomaren Ausdrücken A_i gebildet werden.

Epilog

Wir haben den Aussagen-Kalkül als Konkretisierung des Folgerungs-Begriffes eingeführt. Insofern findet er seinen Platz in der traditionellen Junktoren-Logik. Diese traditionelle Logik geht vom umgangssprachlichen Verständnis der Junktoren aus, deren Bedeutungen zur Vermeidung von Mißverständnissen präzisiert werden (siehe §1). Ausgehend vom Begriff der Gültigkeit (oder Wahrheit) einer Aussage werden die logisch-allgemeingültigen Aussagen eingeführt. Wir haben diese traditionelle Aussagenlogik in den §§ 1, 2, 3, 4, 5, 6 und 7 entwickelt.

Der Aussagenkalkül ermöglicht aber auch einen *alternativen Zugang* zur Junktoren-Logik. Man beginnt diesen Aufbau, indem man zunächst wie in §2 die formale Sprache $\mathcal{L}$ der Aussagenlogik entwirft. In dieser Sprache treten dann die Junktoren $\neg, \rightarrow, \wedge, \vee, \ldots$ als undefinierte Zeichen (!) auf (und nicht wie in der traditionellen Logik als Symbole[1]), die eine vorgegebene Bedeutung tragen). Im Anschluß daran stellt man den Aussagen-Kalkül auf. Dieser Kalkül regelt den *Gebrauch* bestimmter Zeichenreihen (Sequenzen von Ausdrücken). Dadurch werden die logischen Zeichen $\neg, \rightarrow, \wedge, \vee, \ldots$ aber *implizit* definiert. Daß beispielsweise der Pfeil '$\rightarrow$' die »Bedeutung« der (philonischen) Implikation hat, ergibt sich aus der Gesamtheit aller Regeln des Kalküls (siehe dazu §4, Aufgaben (8) und (9), und §6, Aufgabe (5)) zusammen mit der Entscheidung, daß die beiden Axiome aus den Regeln (R1) und (R2) „wahre" Aussagen (also Tautologien) sein sollen[2]). Die »Bedeutungen« der Zeichen ergeben sich also durch ihren Gebrauch gemäß der Regeln des Kalküls. Dieser alternative Zugang folgt der (modernen) axiomatischen Methode, so wie sie sich um 1900 herum in der Hilbert-Schule entwickelt hat.

Um den Unterschied recht deutlich zu machen, sei betont, daß in der traditionellen Junktoren-Logik die Junktoren *explizit* eingeführt werden, indem man ihre »Bedeutung« aus der Umgangssprache übernimmt (eventuell präzisiert

---

[1]) Das griechische Wort 'Symbolon' (σύμβολον, lat. 'symbolum') ist aus den Wörtern 'syn' (= zusammen) und 'bállein' (βάλλειν = werfen) zusammengesetzt. Ein 'Symbol' ist demnach ein 'Zusammengefügtes', d.h. ein Zeichen, dem eine bestimmte Bedeutung beigelegt ist.

[2]) Wenn man die Entscheidung fällt, daß die beiden Ausdrücke rechts vom Urteilsstrich in (R1) und (R2) „Kontradiktionen" darstellen sollen, dann erweist sich der Kalkül als ein Rejektions-Kalkül und die beiden Junktoren, von denen im Kalkül die Rede ist, haben die Bedeutung der „Negation" und der „Präsektion" (siehe dazu auch §1, Aufgabe (6)). In der Tat sind

$$\Phi \multimap\!\!< (\Psi \multimap\!\!< \Phi) \quad \text{und} \quad (\neg\Psi) \multimap\!\!< (\Psi \multimap\!\!< \Phi)$$

Kontradiktionen. Der modus ponens hat hier die Interpretation: „wenn $\Phi \multimap\!\!< \Psi$ zu verwerfen ist und auch Φ zu verwerfen ist, dann ist auch Ψ zu verwerfen".

unter Verwendung von Wahrheitstafeln oder von Wahrheitswert-Polynomen). In der traditionellen Logik geht man also vom vorgegebenen Inhalt der Junktoren aus, während man in der durch Kalküle begründeten Logik ohne derartige Voraussetzungen auskommt.

Daß beide Zugänge, der traditionelle und der moderne axiomatische Zugang, zu derselben Klasse von logisch-allgemeingültigen Ausdrücken

$$\{\Phi;\ \Phi \text{ ist Tautologie}\} = \{\Phi;\ \vdash \Phi\}$$

und zu demselben Beweis-Begriff (Folgerungsbegriff, bzw. Deduktions-Begriff) führen, zeigt der Vollständigkeits-Satz.

— * —

Übungsaufgaben zu §7

(1) *Sei Σ eine Menge von $\mathcal{L}$-Ausdrücken. Zeigen Sie, daß Σ genau dann widerspruchsvoll ist, wenn es einen $\mathcal{L}$-Ausdruck Φ gibt so, daß $\Sigma \vdash \neg(\Phi \to \Phi)$.*

(2) *Seien Σ und Δ Mengen von $\mathcal{L}$-Ausdrücken. Zeigen Sie, daß $\Sigma \cup \Delta$ genau dann widerspruchsvoll ist, wenn es einen $\mathcal{L}$-Ausdruck Φ gibt so, daß $\Delta \vdash \Phi$ und $\Sigma \vdash \neg\Phi$.*

Definition. Eine Menge Σ von $\mathcal{L}$-Ausdrücken heißt *unabhängig,* wenn es kein $\Psi \in \Sigma$ gibt so, daß $\Sigma - \{\Psi\} \models \Psi$.

Definition. Zwei Mengen Σ und Γ von $\mathcal{L}$-Ausdrücken heißen *logisch äquivalent,* wenn $\{\Psi \in \mathcal{L};\ \Sigma \models \Psi\} = \{\Psi \in \mathcal{L};\ \Gamma \models \Psi\}$.

(3) Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Eine Menge Γ von $\mathcal{L}$-Ausdrücken ist genau dann unabhängig, wenn jede endliche Teilmenge von Γ unabhängig ist.

(ii) Zu jeder endlichen Menge Γ von $\mathcal{L}$-Ausdrücken gibt es eine logisch-äquivalente unabhängige Teilmenge $\Xi \subseteq \Gamma$.

(iii) Es gibt eine abzählbare Menge von Ausdrücken, die keine logisch äquivalente unabhängige Teilmenge hat.

(iv) Zu jeder abzählbaren Menge Γ von $\mathcal{L}$-Ausdrücken gibt es eine logisch-äquivalente unabhängige Menge Ξ (Beachte, Ξ muß keine Teilmenge von Γ sein!).

Definition. Sei M eine nicht-leere Menge und $R \subseteq M \times M$. Wir nennen R eine *strikte partielle Ordnung* auf M, wenn

(i) für kein $a \in M$, $\langle a,a \rangle \in R$ gilt,

(ii) für alle $a,b,c \in M$ mit $\langle a,b \rangle \in R$ und $\langle b,c \rangle \in R$ stets auch $\langle a,c \rangle \in R$ gilt, und

(iii) für alle $a,b \in M$, wenn $\langle a,b \rangle \in R$, dann $\langle b,a \rangle \notin R$.

(4) Zeigen Sie unter Verwendung des Kompaktheits-Satzes 7.6, daß jede partielle Ordnung auf einer abzählbaren Menge stets zu einer linearen Ordnung auf dieser Menge erweitert werden kann.

Tip: Betrachten Sie die (abzählbare) junktoren-logische Sprache $\mathcal{L}$, deren atomare Aussagen-Symbole $A_{\langle a,b \rangle}$ sind für $a,b \in M$. Zeigen Sie, daß die folgende Menge endlich-erfüllbar ist:

$$\{A_{\langle a,b \rangle} ; \langle a,b \rangle \in R\} \cup \{\neg A_{\langle a,a \rangle} ; a \in M\} \cup \{A_{\langle a,b \rangle} \to \neg A_{\langle b,a \rangle} ; a,b \in M\} \cup$$

$$\cup \{A_{\langle a,b \rangle} \wedge A_{\langle b,c \rangle} \to A_{\langle a,c \rangle} ; a,b,c \in M\} \cup \{A_{\langle a,b \rangle} \vee A_{\langle b,a \rangle} ; a,b \in M\} .$$

Beweisen Sie dazu auf direktem Wege, daß jede partielle Ordnung auf einer endlichen Menge stets zu einer linearen Ordnung auf dieser Menge erweitert werden kann. - Vergl. §15, Aufgabe 6.

(5) Zeigen Sie unter Verwendung des Kompaktheits-Satzes 7.6, daß jede abzählbare torsionsfreie abelsche Gruppe eine mit der Addition verträgliche lineare Ordnung $\leq$ besitzt (d.h. für alle $a,b,c \in G$ gilt: wenn $a \leq b$, dann auch $a+c \leq b+c$).
Tip: Benutzen Sie die Tatsache, daß endlich-erzeugte torsionsfreie abelsche Gruppen $\langle G,+ \rangle$ stets isomorph zur direkten Summe von endlich vielen Kopien der additiven Gruppe aller ganzen Zahlen ist.