

7. AUSSAGENLOGIK: NATÜRLICHES SCHLIESSEN

- 7.1 Der Kalkül des Natürlichen Schließens KNSAL
- 7.2 Die Ableitungsregeln von KNSAL
- 7.3 Hinweise zur Anwendung der Ableitungsregeln von KNSAL
- 7.4 Hinweise zur Konstruktion von Ableitungen in KNSAL
- 7.5 Ableitung in KNSAL und Ableitbarkeit in KNSAL
- 7.6 Gültigkeit in KNSAL
- 7.7 Theorem von KNSAL
- 7.8 Logische Falschheit in KNSAL
- 7.9 Logische Indeterminiertheit in KNSAL
- 7.10 Logische Äquivalenz in KNSAL
- 7.11 Inkonsistenz und Konsistenz in KNSAL
- 7.12 Das System KNSAL+
- 7.13 Exkurs: Darstellungsformate von Ableitungen in Kalkülen des Natürlichen Schließens
- 7.14 Kurze Bemerkungen zur Korrektheit und Vollständigkeit von KNSAL

7.1 Der Kalkül des Natürlichen Schließens KNSAL

7.1.1 Motivation

Die beiden Entscheidungsverfahren, die wir bisher kennen gelernt haben (das Wahrheitstafelverfahren und das Tableauverfahren) haben kaum Ähnlichkeit mit der informalen Art des Schließens, die wir beim Argumentieren oder bei der Konstruktion von Beweisen „natürlicherweise“ verwenden. Intuitiv, so scheint es zumindest, versuchen wir dabei zum Beispiel keine Interpretationen zu ermitteln (im Falle der Aussagenlogik sind es Fragmente von Wahrheitswertzuordnungen) unter der eine bestimmte Satzmenge konsistent wird; eher scheinen wir Ableitungen zu konstruieren. Das folgende Argument und die ihm zugeordneten informalen Ableitungen sollen diese Intuition veranschaulichen.

Argument (D):

Dieter ist **arbeitslos** und Dieter hat viel **Zeit**.

Wenn Dieter **arbeitslos** ist, dann ist Dieter **frustriert**.

Dieter ist **frustriert** und hat viel **Zeit**.

Ableitung (D):

- | | | |
|----|--|-------------|
| 1. | Dieter ist arbeitslos und Dieter hat viel Zeit . | Annahme |
| 2. | Wenn Dieter arbeitslos ist, dann ist Dieter frustriert . | Annahme |
| 3. | Dieter ist arbeitslos . | aus 1 |
| 4. | Dieter ist frustriert . | aus 2 und 3 |
| 5. | Dieter hat viel Zeit . | aus 1 |
| 6. | Dieter ist frustriert und hat viel Zeit . | aus 4 und 5 |

Symbolisierung des Arguments und Ableitung (AL):

1.	$\neg A \wedge Z$	Annahme
2.	$\neg A \rightarrow F$	Annahme
3.	$\neg A$	aus 1
4.	F	aus 2 und 3
5.	Z	aus 1
6.	$F \wedge Z$	aus 4 und 5

In Kalkülen (oder Systemen) des Natürlichen Schließens werden die Schlussmuster, die dem informalen Schließen zugrunde liegen (annähernd) so getreu wiedergegeben, wie die Sätze von AL die logischen Formen deutscher Sätze wiedergeben.

Historisch gehen Kalküle des Natürlichen Schließens auf die Arbeiten des deutschen Logikers Gerhard Gentzen¹ (1909-1945) und des polnischen Logikers Stanisław Jaśkowski² (1906-1965) zurück. Beide haben ihre Systeme unabhängig voneinander entworfen.³

(Gentzen motiviert das natürliche Schließen wie folgt:

„Wir wollen einen Formalismus aufstellen, der möglichst genau das wirkliche logische Schließen bei mathematischen Beweisen wiedergibt. Wir zeigen zunächst an einigen Beispielen, wie das wirkliche Schließen etwa verläuft; zu dem Zwecke betrachten wir drei „richtige Formeln“ und versuchen deren Richtigkeit auf einem möglichst natürlichen Wege einzusehen.

1.1. Erstes Beispiel: $(X \vee (Y \& Z)) \supset ((X \vee Y) \& (X \vee Z))$ ist als richtige Formel zu erkennen (...). Man wird so argumentieren: Es gelte X oder $Y \& Z$. Wir unterscheiden zwei Fälle: 1. X gilt, 2. $Y \& Z$ gilt. Im 1. Falle folgt die Gültigkeit von $(X \vee Y)$ sowie $(X \vee Z)$, also auch von $(X \vee Y) \& (X \vee Z)$. Im 2. Falle gilt $(Y \vee Z)$, also sowohl Y als auch Z . Aus Y folgt $X \vee Y$, aus Z folgt $X \vee Z$. Also gilt auch jetzt $(X \vee Y) \& (X \vee Z)$. Damit ist dies überhaupt aus $(X \vee (Y \& Z))$ hergeleitet, d. h. es gilt: $(X \vee (Y \& Z)) \supset ((X \vee Y) \& (X \vee Z))$.“⁴

Da die anderen zwei Beispiele Gentzens aus dem Bereich der Prädikatenlogik sind, soll uns hier das erste Beispiel genügen. Wir werden die Regeln, die dieser Argumentation zugrunde liegen in Abschnitt 7.2 behandeln.)

¹ ‚Untersuchungen über das logische Schließen‘, *Mathematische Zeitschrift* 39 (1934-35), 176-210, 405-431; Göttinger Dissertation von 1934.

² ‚On the Rules of Supposition in Formal Logic‘, *Studia Logica* 1 (1934, Warszawa).

³ Dazu schreiben William und Martha Kneale (in ihrem Buch *The Development of Logic*, Oxford: Clarendon Press, 1962, Seite 539): „In the same year [d. h. 1934] S. Jaśkowski produced independently a paper [siehe oben] which is an elaboration of results obtained as early as 1926 in the seminar of J. Łukasiewicz.“

⁴ Seite 183. Unser \rightarrow (\wedge) ist Gentzens \supset ($\&$) und bei den kursiven Buchstaben handelt es sich um atomare Sätze—wir würden sie also normal und nicht kursiv schreiben. (Die formale Ableitung zu diesem Beispiel ist etwas kompliziert. Gentzen gibt sie auf Seite 188 an.)

7.1.2 Zur Eigenart von KNSAL

Das System KNSAL („Kalkül des natürlichen Schließens für AL“), mit dem wir uns in diesem Kapitel beschäftigen wollen hat die folgenden Eigenarten.

Die Regeln von Systemen des natürlichen Schließens sind (wie die Regeln aller Kalküle) **syntaktische Regeln**. Die obigen Schlussfolgerungen können als Anwendungen syntaktischer (bzw. struktureller) Regeln zur Ableitung von Sätzen mit einer bestimmten syntaktischen Form (bzw. Struktur) aus Sätzen mit einer bestimmten syntaktischen Form betrachtet werden. Diese Ableitungsregeln (oder Schlussregeln) sind syntaktisch (bzw. strukturell), weil sie auf die syntaktische Form bzw. die Struktur von Sätzen einer formalen Sprache und nicht auf ihre Wahrheitswerte bzw. ihre Interpretationen Bezug nehmen.

Gleichwohl ist zu beachten, dass diese Ableitungsregeln als Regeln für die deduktive Logik konzipiert sind. Und ein Charakteristikum der deduktiven Logik ist (siehe Kapitel 1), dass die Regeln, die für sie entworfen werden garantieren sollen, dass das Schließen mit ihnen wahrheitserhaltend ist. Diese Regeln sind also mit dem Ziel der Wahrheitserhaltung konzipiert worden, sie sollen uns niemals von wahren zu falschen Sätzen führen.

Systeme des natürlichen Schließens sind **reine Regel-Systeme**. KNSAL arbeitet ausschließlich mit Ableitungsregeln: Reiterationsregel, Einführungs- und Beseitigungsregeln. (Das System KNSAL+, das wir in Abschnitt 7.12 kennenlernen werden, erweitert diese Regelmengung um weitere Ableitungsregeln.)

Es gibt Systeme anderer Art, etwa algebraische (z.B. Boolesche Mengenalgebra) oder axiomatische Systeme (z.B. Hilbert-Kalkül). Axiomatische Systeme, zum Beispiel, bestehen im Unterschied zu Systemen des natürlichen Schließens, aus einer Menge von Axiomen (d.h., grob gesagt, aus einer Menge von Sätzen, die in einem solchen System uneingeschränkt „gelten“) und aus mindestens einer Ableitungsregel. Auf solche Alternativen zu Systemen des natürlichen Schließens werden wir in diesem Kurs jedoch nicht weiter eingehen können.

7.2 Die Ableitungsregeln von KNSAL

7.2.1 Die Reiterationsregel

Reiterationsregel (R):

$$\begin{array}{l} | \quad A \\ > \quad | \quad A \end{array}$$

Das Zeichen '>' zeigt an, welchen Satz wir gemäß der angegebenen Regel ableiten können.

Anwendungsbeispiel für (R):

1		$A \wedge B$	Annahme
2		$C \leftrightarrow D$	Annahme
3		$A \wedge B$	1 R

Eine Annahme wird durch eine waagerechte Linie, die **Annahmenlinie**, von den Sätzen, die aus ihnen abgeleitet werden, abgegrenzt. Eine senkrechte Linie, die **Ableitungslinie** (auch "Bereichslinie" genannt) zeigt an, auf welche Zeilen sich eine Ableitung erstreckt.

(Das Format, in dem die Ableitungen in diesem Skript dargestellt werden, geht auf Frederic B. Fitch zurück: *Symbolic Logic: An Introduction*, New York: Roland, 1952. Auf andere Formate werden wir an späterer Stelle kurz eingehen.)

7.2.2 Einführungs- und Beseitigungsregeln für ‚ \wedge ‘.

Konjunktionseinführung (\wedge E):

$$\begin{array}{l} | \quad A \\ | \\ | \quad B \\ | \\ > \quad | \quad A \wedge B \end{array}$$

\wedge E erlaubt uns, $A \wedge B$ aus den Sätzen A und B (von AL) abzuleiten, die in früheren Zeilen vorkommen.

Konjunktionsbeseitigung (\wedge B):

$$\begin{array}{l} | \quad A \wedge B \\ | \\ > \quad | \quad A \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{l} | \quad A \wedge B \\ | \\ > \quad | \quad B \end{array}$$

\wedge B erlaubt uns, A aus $A \wedge B$ abzuleiten und B aus $A \wedge B$ abzuleiten.

Anwendungsbeispiel:

Argument (D):

Eva macht den Einkauf und **F**abian fegt das Treppenhaus.

Grace macht den Abwasch und es kommt hinzu, dass **H**olger die leeren Flaschen genau dann wegbringt, wenn **I**na die Pflanzen gießt.

Fabian fegt das Treppenhaus und es kommt hinzu, dass **H**olger die leeren Flaschen genau dann wegbringt, wenn **I**na die Pflanzen gießt.

Ableitung in KNSAL:

Ableitungsziel: $F \wedge (H \leftrightarrow I)$

1	E \wedge F	Annahme
2	G \wedge (H \leftrightarrow I)	Annahme
3	F	1 \wedge B
4	H \leftrightarrow I	2 \wedge B
5	F \wedge (H \leftrightarrow I)	3,4 \wedge E

Die Konklusion des obigen Arguments folgt aus seinen Prämissen. Die Prämissen werden als Annahmen behandelt und die Konklusion wird aus ihnen mit Hilfe der Ableitungsregeln abgeleitet. In diesem Fall ist die Konklusion des Arguments das Ableitungsziel. Das **Ableitungsziel** ist über die Ableitung zu schreiben. Das erleichtert die Orientierung bei der Konstruktion der Ableitungen (mehr dazu in Abschnitt 7.4).

7.2.3 Einführungs- und Beseitigungsregeln für \rightarrow .

Konditionalbeseitigung (\rightarrow B):

	$A \rightarrow B$
	A
>	B

\rightarrow B erlaubt uns, B aus den Sätzen A und $A \rightarrow B$ abzuleiten, die in früheren Zeilen der Ableitung vorkommen. \rightarrow B wird auch „Modus Ponens“ genannt.

Konditionaleinführung (\rightarrow E):

		A
		B
>		$A \rightarrow B$

Bei der Ableitung von $A \rightarrow B$ wird eine **Teilableitung** konstruiert, in der A als Annahme und B als Satz der letzten Zeile der Teilableitung dienen.

Anwendungsbeispiel:

Argument (D):

Wenn Udo ein TU-Diplom hat, dann hat Udo einen Uni-Abschluss.
 Wenn Udo einen Uni-Abschluss hat, dann ist Udo ein Akademiker.

Wenn Udo ein TU-Diplom hat, dann ist Udo ein Akademiker.

Ableitung in KNSAL:

Ableitungsziel: $D \rightarrow A$

1		$D \rightarrow U$	Annahme
2		$U \rightarrow A$	Annahme
3			Annahme
4			U
5			A
6		$D \rightarrow A$	3-5 \rightarrow E

Für die Ableitung eines Konditionals muss eine Teilableitung (hier: in Fettdruck) konstruiert werden. Als Annahme dieser Teilableitung, d. h. als **Hilfsannahme**, ist der Vordersatz des abzuleitenden Konditionals zu wählen. In der letzten Zeile der Teilableitung muss der Hintersatz dieses Konditionals stehen. Wenn die Teilableitung beendet ist, wird die gesamte Teilableitung im Kommentar für die Rechtfertigung des Konditionals, das unter der Teilableitung eingetragen wird, zitiert.

Es folgen einige allgemeine Bemerkungen zur Teilableitung am Beispiel der obigen Ableitung.

Bemerkungen zur Teilableitung:

1. Die Teilableitung nimmt die Zeilen 3 bis 5 der Ableitung ein, was durch die innere senkrechte Linie, die sog. **Teilableitungslinie** angezeigt wird, die die Ableitungslinie der Teilableitung ist. Die äußere senkrechte Linie ist die Hauptableitungslinie. (Wir unterscheiden somit zwei Arten von Ableitungslinien: Teilableitungslinien und Hauptableitungslinien.)
2. Auf der Grundlage der **primären Annahmen** (Zeilen 1 und 2)—hier der Prämissen—wird gezeigt, dass ‚A‘ in Zeile 5 abgeleitet werden kann, wenn in Zeile 3 ‚D‘ als Hilfsannahme angenommen wird. (Wir unterscheiden somit zwei Arten von Annahmen: primäre Annahmen und Hilfsannahmen.) Die Teilableitung von ‚A‘ aus ‚D‘ in den Zeilen 3 bis 5 erlaubt aufgrund von $\rightarrow E$ die Ableitung von ‚D \rightarrow A‘ in der Hauptableitung.
3. Das **Beenden einer Teilableitung**: Eine Teilableitung wird beendet, indem die Teilableitungslinie beendet wird und nach links zur nächsten Ableitungslinie übergegangen wird. Wenn eine Teilableitung beendet wird, gilt ihre Hilfsannahme als „gelöscht“. D. h.: man darf sich später in der Ableitung bei der Rechtfertigung von Ableitungsschritten auf keine der Zeilen der Teilableitung berufen. Man sagt dann auch, dass diese Zeilen „**unzugänglich**“ sind.

(Beispiel: Wenn man die oben stehende Ableitung fortführen würde und ihr eine siebte Zeile mit dem Satz ‚A‘ unter Berufung auf Zeilen 3 und 6 hinzufügen würde, dann würde man einen Fehler begehen, da Zeile 3 für diese Zeile unzugänglich ist.)

Auf die Teilableitung als Ganze jedoch darf man sich später in der Ableitung berufen; siehe obiges Beispiel: Rechtfertigung für den Satz in Zeile 6: 3-5 (ein Bindestrich wird benutzt, um die erste und die letzte Zeilennummer der Teilableitung zu trennen).

Die Einführungs- bzw. Beseitigungsregeln, die die Konstruktion von Teilableitungen erforderlich machen, sind: $\neg E$, $\neg B$, $\vee B$ (zwei Teilableitungen), $\rightarrow E$, $\leftrightarrow E$ (zwei Teilableitungen).

4. **Schachtelung von Teilableitungen**: Teilableitungen können innerhalb von Teilableitungen vorkommen. Dazu das folgende Beispiel:

Ableitungsziel: $X \rightarrow (Y \rightarrow Z)$

1	$(X \wedge Y) \rightarrow Z$	Annahme
2	X	Annahme
3	Y	Annahme
4	X \wedge Y	2, 3 \wedge E
5	Z	1, 4 \rightarrow B
6	Y \rightarrow Z	3-5 \rightarrow E
7	X \rightarrow (Y \rightarrow Z)	2-6 \rightarrow E

7.2.4 Einführungs- und Beseitigungsregeln für \neg .

Die Negationseinführung (\neg E) und die Negationsbeseitigung (\neg B) sind nahe mit einer Schlussform verwandt, die „Reductio ad absurdum“ genannt wird. Kurz: Wenn mit einer Hilfsannahme sowohl ein Satz als auch seine Negation abgeleitet werden können, dann kann die Hilfsannahme verworfen werden, da sie zu einem Widerspruch (also zu etwas logisch Absurdem) führt.

Negationseinführung (\neg E):

	A	
	B	
	¬B	
>	¬A	

\neg E erlaubt, aus einer Teildableitung, die einen Satz A zur Annahme hat und in der die Sätze B und $\neg B$ abgeleitet sind, $\neg A$ abzuleiten. Dabei ist die Reihenfolge der Ableitung von B und $\neg B$ beliebig.

Anwendungsbeispiel:

Ableitungsziel: $\neg A$

1	$(A \wedge B) \rightarrow C$	Annahme
2	B \wedge ¬C	Annahme
3	A	Annahme
4	B	2 \wedge B
5	A \wedge B	3, 4 \wedge E
6	C	1, 5 \rightarrow B
7	¬C	2 \wedge B
8	¬A	3-7 \neg E

Negationsbeseitigung ($\neg B$):

		$\neg A$
		B
		$\neg B$
$>$	A	

Die Regel $\neg B$ erlaubt, A abzuleiten, wenn eine Teildableitung konstruiert worden ist, die $\neg A$ zur Annahme hat und innerhalb dieser Teildableitung die Sätze B und $\neg B$ abgeleitet worden sind. Dabei können B und $\neg B$ in beliebiger Reihenfolge abgeleitet werden.

Anwendungsbeispiele:

Ableitungsziel: D

1		$\neg D \rightarrow E$	Annahme
2		$E \rightarrow D$	Annahme
3		$\neg D$	Annahme
4		E	1, 3 $\rightarrow B$
5		D	2, 4 $\rightarrow B$
6		$\neg D$	3 R
7		D	3-6 $\neg B$

Die Negationsregeln und die Reiterationsregel:

Mit Hilfe der Reiterationsregel R lassen sich oftmals diejenigen Sätze ableiten, die für die Anwendung von $\neg E$ und $\neg B$ benötigt werden. Beispiel:

Ableitungsziel: G

1		$\neg\neg G$	Annahme
2		$\neg G$	Annahme
3		$\neg\neg G$	1 R
4		$\neg G$	2 R
5		G	2-4 $\neg B$

7.2.5 Einführungs- und Beseitigungsregeln für ‚ \vee ‘.

Disjunktionseinführung ($\vee E$):

$$\begin{array}{c}
 & | & A & \text{oder} & | & A \\
 & | & & & | & \\
 > & | & A \vee B & & | & B \vee A
 \end{array}$$

Wichtig: B und alle seine Komponenten (falls welche vorhanden sind), können in der Ableitung **völlig neu** sein!

Anwendungsbeispiel:

Der **Hahn** kräht auf dem Mist und die **Gänse** schnattern.
 Wenn der **Hahn** auf dem Mist kräht, dann **ändert** sich das Wetter.

Das Wetter **ändert** sich oder der **Bauer** schimpft.

Ableitungsziel: $A \vee B$

1	H \wedge G	Annahme
2	H \rightarrow A	Annahme
3	H	1 \wedge B
4	A	2, 3 \rightarrow B
5	A \vee B	4 \vee E

Disjunktionsbeseitigung ($\vee B$):

$$\begin{array}{c}
 & | & A \vee B \\
 & | & \underline{A} \\
 & | & C \\
 & | & \\
 & | & \underline{B} \\
 & | & C \\
 > & | & C
 \end{array}$$

Nach der Regel $\vee B$ kann der Satz C abgeleitet werden, wenn wir bereits einen Satz der Form $A \vee B$ haben und sowohl eine Teilableitung mit der Hilfsannahme A und mit C als letztem Satz konstruiert worden ist als auch eine Teilableitung, die mit der Hilfsannahme B beginnt und ebenfalls mit C endet.

Diese Regel ist intuitiv vielleicht nicht unmittelbar ansprechend. Gerhard Gentzen erläutert ihren „inhaltlichen Sinn“ wie folgt:

„OB: („Fallunterscheidung“.) Wenn man $A \vee B$ bewiesen hat, so kann man eine Fallunterscheidung machen: Man nimmt zunächst an, es gelte A , und leitet daraus etwa C her. Wenn ferner aus der Annahme der Gültigkeit von B ebenfalls C sich ableiten läßt, dann gilt C überhaupt, d.h. unabhängig von beiden Annahmen.“⁵

Es folgt ein nicht-mathematisches Anwendungsbeispiel für diese Regel in dem unter C die Konklusion eines Arguments figuriert.

Kant oder **Leibniz** ist ein großer Philosoph.

Wenn **Kant** ein großer Philosoph ist, dann hat **Deutschland** einen großen und **pünktlichen** Philosophen hervorgebracht.

Wenn **Leibniz** ein großer Philosoph ist, dann hat **Deutschland** einen großen und **universalgelehrten** Philosophen hervorgebracht.

Deutschland hat einen großen Philosophen hervorgebracht und dieser war **pünktlich** oder **universalgelehrt**.

Ableitungsziel: $D \wedge (P \vee U)$

1	K \vee L	Annahme
2	$K \rightarrow (D \wedge P)$	Annahme
3	$L \rightarrow (D \wedge U)$	Annahme
4	K	Annahme
5	$D \wedge P$	$2, 4 \rightarrow B$
6	P	$5 \wedge B$
7	$P \vee U$	$6 \vee E$
8	D	$5 \wedge B$
9	D \wedge (P \vee U)	$8, 7 \wedge E$
10	L	Annahme
11	$D \wedge U$	$3, 10 \rightarrow B$
12	U	$11 \wedge B$
13	$P \vee U$	$12 \vee E$
14	D	$11 \wedge B$
15	D \wedge (P \vee U)	$14, 13 \wedge E$
16	D \wedge (P \vee U)	1, 4-9, 10-15, $\vee B$

⁵ Gentzen a.a.O. Seite 187; Notation angepasst. Das ‚OB‘ meint hier oder-Beseitigung.

7.2.6 Einführungs- und Beseitigungsregeln für \leftrightarrow

Bikonditionaleinführung ($\leftrightarrow E$):

	A
	B
	B
	A
>	$A \leftrightarrow B$

$\leftrightarrow E$ erlaubt die Ableitung von $A \leftrightarrow B$, wenn zwei Teildableitungen konstruiert worden sind: eine, die A zur Hilfsannahme und B als ihren letzten Satz hat sowie eine, die B zur Hilfsannahme und A als ihren letzten Satz hat.

Wenn $\neg K \wedge \neg K$ kein Selbstwiderspruch ist, dann ist $\neg K \wedge \neg K$ eine Tautologie, es sei denn der Satz $\neg K \wedge \neg K$ ist kontingent.

Satz $\neg K \wedge \neg K$ ist nur dann eine Tautologie, wenn er weder ein Selbstwiderspruch noch ein kontingenter Satz ist.

Satz $\neg K \wedge \neg K$ ist eine Tautologie genau dann, wenn er weder ein Selbstwiderspruch noch kontingent ist.

Ableitungsziel: $T \leftrightarrow (\neg S \wedge \neg K)$

1	$\neg S \rightarrow (\neg K \rightarrow T)$	Annahme
2	$T \rightarrow (\neg S \wedge \neg K)$	Annahme
3	$\neg S \wedge \neg K$	Annahme
4	$\neg S$	$3 \wedge B$
5	$\neg K \rightarrow T$	$1, 4 \rightarrow B$
6	$\neg K$	$3 \wedge B$
7	T	$5, 6 \rightarrow B$
8	T	Annahme
9	$\neg S \wedge \neg K$	$2, 8 \rightarrow B$
10	$T \leftrightarrow (\neg S \wedge \neg K)$	3-7, 8-9, $\leftrightarrow E$

Bikonditionalbeseitigung (\leftrightarrow B):

		$A \leftrightarrow B$	oder		$A \leftrightarrow B$
		A			B
>		B			A

Wenn $A \leftrightarrow B$ in einer Zeile vorkommt und A in einer anderen Zeile vorkommt, dann kann B mit \leftrightarrow B abgeleitet werden. Wenn $A \leftrightarrow B$ in einer Zeile vorkommt und B in einer anderen Zeile vorkommt, dann kann A abgeleitet werden.

Anwendungsbeispiel:

Kalle wird eingewechselt und Kalle kommt **gut** ins Spiel.
Kalle schießt **genau dann** ein Tor, **wenn** er **gut** ins Spiel kommt.

Kalle schießt ein **Tor**.

Ableitungsziel: T

1		$E \wedge G$	Anahme
2		<u>$T \leftrightarrow G$</u>	Annahme
3		G	$1 \wedge B$
4		T	$2, 3 \leftrightarrow B$

7.3 Hinweise zur Anwendung der Regeln von KNSAL

1. Eine Regel von KNSAL ist immer entweder auf den **ganzen Satz einer Zeile** anzuwenden (nicht auf eine Komponente eines Satzes) oder—bei Regeln, die die Konstruktion von Teibleitungen erforderlich machen—auf die **ganze Teibleitung** (nicht auf einzelne Sätze der Teibleitung).
2. Die Zeilen und die Teibleitungen, die im Kommentar zitiert werden, müssen (wie in Abschnitt 7.2.4 bereits erläutert) **zugänglich** sein: In einer Ableitung ist ein Satz oder eine Teibleitung zugänglich in Zeile n , wenn dieser Satz oder diese Teibleitung nicht innerhalb der Ableitungslinie einer Teilannahme liegt, die vor Zeile n gelöscht worden ist. Zur Illustration eine fehlerhafte (!) Ableitung, in der diese Punkte nicht beachtet worden sind:

1		(B → A) ∧ C	Annahme
2		(A → C) → B	Annahme
3		┌ A	Annahme
4		┌ A	Annahme
5		C	1 ∧ B
6		A → C	4-5 → E
7		B	2, 6 → B
8		┌ C	Annahme
9		┌ B	Annahme
10		B → A	1 ∧ B
11		A	9, 10 → B
12		A ↔ B	3-7, 9-11 ↔ E
13		B	7 R Fehler!
14		A	12, 13 ↔ B
15		A ↔ C	4-5, 8-14 ↔ E Fehler!

Kommentar:

Zeile 13: Der Satz in Zeile 7 liegt im Bereich einer Annahme (Zeile 3), die vor Zeile 13 gelöscht worden ist.

Zeile 15: Die Teilableitung aus 4-5 liegt im Bereich einer Annahme (Zeile 3), die vor Zeile 15 gelöscht worden ist.

7.4 Hinweise zur Konstruktion von Ableitungen in KNSAL

Bei der Konstruktion von Ableitungen in Systemen des natürlichen Schließens handelt es sich im Grunde um eine Rekonstruktion der primären Annahmen [Hilfsannahmen] aus dem Ableitungsziel [Teilziel] mit Hilfe der Ableitungsregeln des Systems.

(Diese Vorgehensweise „von unten nach oben“ widerspricht nicht der Auffassung, dass Ableitungen in Kalkülen des natürlichen Schließens, die Struktur üblicher logischer Argumentationen getreu wiedergeben.)

Somit ist für die Konstruktion von Ableitungen die Kenntnis der Regeln, die Analyse der syntaktischen Form des Ableitungsziels und der syntaktischen Form der Annahmen von Bedeutung.

Auch wenn die Konstruktion von Ableitungen etwas Intuition verlangt, kann man einige Richtlinien für das Bauen von Ableitungen formulieren, da die Regeln von KNSAL nahelegen, wie Ableitungen in diesem System zu konstruieren sind.

Schritt 1: Eintragen des Ableitungsziels (d.h. des Zielsatzes) unter die primären Annahmen, wobei zwischen den primären Annahmen und dem Zielsatz „genügend“ Platz für die Zeilen der Ableitung bleiben sollte.

- Schritt 2: Analyse der syntaktischen Form des **Zielsatzes**.
Dabei sind folgende Fragen zu berücksichtigen:
- Ist der Zielsatz atomar oder molekular?
 - Welche Atome enthält er?
 - Falls er molekular ist, was ist sein Hauptkonnektiv?
 - Wie sind seine Komponenten aufgebaut (welche Konnektive enthalten sie)?
- Schritt 3: Analyse der syntaktischen Form der dem Zielsatz **zugänglichen Sätze**.
Dabei sind folgende Fragen zu berücksichtigen:
- Sind die zugänglichen Sätze (z.B. primäre Annahmen, Hilfsannahmen) atomar oder molekular?
 - Welche Atome enthalten sie?
 - Falls sie molekular sind, was sind ihre Hauptkonnektive?
 - Haben sie Satzkomponenten, die denen des Zielsatzes ähneln?
 - Mit Hilfe welcher Regel(n) kann der Zielsatz abgeleitet werden?
- Schritt 4: Wenn der Zielsatz sofort aus den zugänglichen Sätzen abgeleitet werden kann, dann ist er abzuleiten.
- Schritt 5: Wenn der Zielsatz nicht sofort aus den zugänglichen Sätzen abgeleitet werden kann, dann ist ein Teilziel auszuwählen. Ein **Teilziel** ist ein Satz (oder im Falle von Anwendungsregel, die die Konstruktion zweier Teibleitungen verlangen: ein Satzpaar), der (das) sofort zur Ableitung des Zielsatzes führt, wenn es aus den zugänglichen Sätzen abgeleitet wird.
- Man kann zwei Arten von Teilzielen eintragen: E(-Regel)-Teilziele oder B(-Regel)-Teilziele:
1. Eintrag eines **E-Teilziels**: Wenn der Zielsatz ein Hauptkonnektiv besitzt, dann ist ein Teilziel einzutragen, das die Anwendung der Regel von KNSAL unterstützt, die dieses Konnektiv einführt.
 2. Eintrag eines **B- Teilziels**:
 - a. wenn der Zielsatz eine Komponente eines zugänglichen Satzes ist, oder
 - b. wenn er von der Beseitigung eines Satzkonnektivs in einem zugänglichen Satz abhängig ist, dann ist ein Teilziel einzutragen, das die Anwendung der Regel von KNSAL unterstützt, die das betreffende Konnektiv beseitigt.
- Schritt 6: Wenn ein Teilziel ausgewählt werden muss, ist es als neuer Zielsatz (bzw. als neues Zielsatzpaar im Falle der Anwendung von $\vee B$ und $\leftrightarrow E$) einzutragen.

Schritt 7: Rückkehr zu Schritt 2 und Wiederholung der Schritte 2 bis 7, bis die Ableitung fertiggestellt ist.

DIE ABLEITUNGSREGELN VON KNSAL

REITERATION

Reiterationsregel (R)

$$\begin{array}{l} \quad | \quad A \\ > \quad | \quad A \end{array}$$

KONJUNKTION

Konjunktionseinführung (\wedge E)

$$\begin{array}{l} \quad | \quad A \\ \quad | \quad B \\ > \quad | \quad A \wedge B \end{array}$$

Konjunktionsbeseitigung (\wedge B):

$$\begin{array}{l} \quad | \quad A \wedge B \\ > \quad | \quad A \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{l} \quad | \quad A \wedge B \\ > \quad | \quad B \end{array}$$

DISJUNKTION

Disjunktionseinführung (\vee E)

$$\begin{array}{l} \quad | \quad A \\ > \quad | \quad A \vee B \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{l} \quad | \quad A \\ > \quad | \quad B \vee A \end{array}$$

Disjunktionsbeseitigung (\vee B)

$$\begin{array}{l} \quad | \quad A \vee B \\ \quad | \quad \underline{} \\ \quad | \quad C \\ \quad | \quad \underline{} \\ \quad | \quad C \\ > \quad | \quad C \end{array}$$

7.5 Ableitung in KNSAL und Ableitbarkeit in KNSAL

Definition 7.5.1 (Ableitung in KNSAL):

Eine **Ableitung in KNSAL** ist eine Abfolge von Sätzen von AL in der jeder Satz

- entweder als Annahme behandelt wird, wobei der Bereich der Annahme durch die Ableitungslinie angezeigt wird,
- oder durch eine der Regeln von KNSAL gerechtfertigt wird.

Beispiel: Z.B. die Ableitung in Abschnitt 7.2.6.

Definition 7.5.2 (Ableitbarkeit in KNSAL):

Ein Satz A von AL ist aus einer Menge Γ von Sätzen von AL **in KNSAL ableitbar** (formal: $\Gamma \vdash_{\text{KNSAL}} A$) genau dann, wenn es eine Ableitung in KNSAL gibt, in der alle primären Annahmen Elemente von Γ sind und A nur im Bereich dieser Annahmen vorkommt, der durch die Hauptableitungslinie markiert wird.

$\Gamma \not\vdash_{\text{KNSAL}} A$ lies: „ A ist in KNSAL aus Γ nicht ableitbar“

Der Begriff der Ableitbarkeit in KNSAL ist der syntaktische Grundbegriff von KNSAL.

Kommentare:

1. Es kann viele Ableitungen geben, die eine Ableitbarkeitsbehauptung gleichermaßen gut demonstrieren.
2. Die Konstruktion einer (einzigen) korrekten Ableitung ist hinreichend für die Demonstration einer bestimmten Ableitbarkeitsbehauptung.
3. Nach Definition 7.5.2 muss jede primäre Annahme Element der Menge Γ sein, aber nicht jedes Element der Menge Γ braucht in der Ableitung eingesetzt zu werden (wenn das Ableitungsziel das nicht erfordert).
4. Nach Definition 7.5.2 darf der abzuleitende Satz nur (!) innerhalb des Bereichs der primären Annahmen vorkommen, der durch die Hauptableitungslinie gekennzeichnet wird.

Beispiel zu Kommentar 4:

Ableitungsziel: $A \vee B$

1		$\neg C \vee A$	Annahme
2		C	Annahme
<hr/>			
3		$\neg C$	Annahme
<hr/>			
4		$\neg A$	Annahme
<hr/>			
5		$\neg C$	3 R
6		C	2 R
7		A	4-6 $\neg B$
8		$A \vee B$	7 $\vee E$

Das Ableitungsziel muss hier auf anderem Wege erreicht werden.

7.6 Gültigkeit in KNSAL

Definition 7.6.1 (Gültigkeit in KNSAL):

Ein Argument von AL ist **gültig in KNSAL** genau dann, wenn die Konklusion des Arguments aus der Menge, die aus den Prämissen besteht, in KNSAL ableitbar ist.

Definition 7.6.2 (Ungültigkeit in KNSAL):

Ein Argument von AL ist **ungültig in KNSAL** genau dann, wenn es nicht gültig in KNSAL ist.

Beispiel:

$(C \rightarrow \neg A) \wedge (A \rightarrow B)$

$C \leftrightarrow (C \vee B)$

$D \rightarrow A$

$\neg D$

Dieses Argument ist in KNSAL gültig.

Ableitungsziel: $\neg D$

1		$(C \rightarrow \neg A) \wedge (A \rightarrow B)$	Annahme
2		$C \leftrightarrow (C \vee B)$	Annahme
3		$D \rightarrow A$	Annahme
4		<u>D</u>	Annahme
5		A	$3, 4 \rightarrow B$
6		$A \rightarrow B$	$1 \wedge B$
7		B	$5, 6 \rightarrow B$
8		$C \vee B$	$7 \vee E$
9		C	$2, 8 \leftrightarrow B$
10		$C \rightarrow \neg A$	$1 \wedge B$
11		$\neg A$	$9, 10 \rightarrow B$
12		$\neg D$	$4-11 \neg E$

7.7 Theorem von KNSAL

Kommen wir nun zu dem Spezialfall der Ableitung eines Satzes A aus einer Menge von Sätzen Γ in dem $\Gamma = \emptyset$.

Definition 7.7 (Theorem von KNSAL; „logische Wahrheit von KNSAL“):

Ein Satz A von AL ist ein **Theorem von KNSAL** genau dann, wenn A in KNSAL aus der leeren Menge \emptyset (d.h. ohne Berufung auf primäre Annahmen) ableitbar ist.

Beispiel: $\emptyset \vdash_{\text{KNSAL}} \neg((A \wedge B) \wedge \neg(A \wedge B))$

Ableitungsziel: $\neg((A \wedge B) \wedge \neg(A \wedge B))$

1		<u>$(A \wedge B) \wedge \neg(A \wedge B)$</u>	Annahme
2		$A \wedge B$	$1 \wedge B$
3		$\neg(A \wedge B)$	$1 \wedge B$
4		$\neg((A \wedge B) \wedge \neg(A \wedge B))$	$1-3 \neg E$

Wir schreiben: $\emptyset \vdash_{\text{KNSAL}} \neg((A \wedge B) \wedge \neg(A \wedge B))$. Einige Beobachtungen dazu:

1. Es gibt keine primären Annahmen in dieser Ableitung.
2. Jede Hilfsannahme wurde gelöscht.
3. Der Satz „ $\neg((A \wedge B) \wedge \neg(A \wedge B))$ “ in der letzten Zeile liegt nur im Bereich der Hauptableitungslinie bzw. der primären Annahmen (in diesem Fall gibt es keine). Da Ableitungen von Theoremen keine primären Annahmen haben, können Hauptableitungslinien eigentlich ausgelassen werden. Aber wir werden in Ableitungen aus \emptyset Hauptableitungslinien ziehen, um anzuzeigen, dass alle Annahmen, die in einer solchen Ableitung gemacht werden Hilfsannahmen sind.

7.8 Logische Falschheit in KNSAL

Ein Theorem von KNSAL kann auch logische Wahrheit in KNSAL genannt werden. Der Begriff der logischen Falschheit in KNSAL lässt sich wie folgt definieren.

Definition 7.8 (logische Falschheit in KNSAL):

Ein Satz A von AL ist eine **logische Falschheit in KNSAL** genau dann, wenn $\neg A$ in KNSAL aus der leeren Menge ableitbar ist.

Beispiel:

$$\vdash_{\text{KNSAL}} \neg((A \wedge B) \wedge \neg(A \wedge B)) \quad (\text{Siehe das Beispiel in 7.7.})$$

Somit ist $(A \wedge B) \wedge \neg(A \wedge B)$ eine logische Falschheit in KNSAL

7.9 Logische Indeterminiertheit in KNSAL

Definition 7.9 (logische Indeterminiertheit in KNSAL):

Ein Satz A von AL ist eine **logische Indeterminiertheit in KNSAL** genau dann, wenn A weder ein Theorem von KNSAL noch eine logische Falschheit in KNSAL ist.

7.10 Logische Äquivalenz in KNSAL

Definition 7.10 (Logische Äquivalenz in KNSAL):

Sätze A und B von AL sind **in KNSAL äquivalent** genau dann, wenn B in KNSAL aus $\{A\}$ ableitbar ist und A in KNSAL aus $\{B\}$ ableitbar ist.

Beispiel: Demonstration der KNSAL-Äquivalenz von ‚ A ‘ und ‚ $\neg\neg A$ ‘. Dazu werden zwei Ableitungen benötigt.

Ableitungsziel: $\neg\neg A$

1	A	Annahme
2	$\neg A$	Annahme
3	A	1 R
4	$\neg A$	2 R
5	$\neg\neg A$	2-4 $\neg E$

Ableitungsziel: A

1	$\neg\neg A$	Annahme
2	$\neg A$	Annahme
3	$\neg\neg A$	1 R
4	$\neg A$	2 R
5	A	2-4 $\neg B$

Alternative mit nur einer Ableitung:

1	A	Annahme
2	$\neg A$	Annahme
3	A	1 R
4	$\neg A$	2 R
5	$\neg\neg A$	2-4 $\neg E$
6	$\neg\neg A$	Annahme
7	$\neg A$	Annahme
8	$\neg\neg A$	6 R
9	$\neg A$	7 R
10	A	7-9 $\neg B$
11	$A \leftrightarrow \neg\neg A$	1-5, 6-10 $\leftrightarrow E$

Somit: $\vdash_{\text{KNSAL}} A \leftrightarrow \neg\neg A$

Beide Ableitungen rechtfertigen die Ableitungsregel ‘Doppelte Negation (DN)’. Abgeleitete Ableitungsregeln dieser Art werden wir in KNSAL+ einsetzen können.

7.11 Inkonsistenz und Konsistenz in KNSAL

Definition 7.11.1 (Inkonsistenz in KNSAL):

Eine Menge Γ von Sätzen von AL ist **in KNSAL inkonsistent** genau dann, wenn sowohl ein Satz A von AL als auch seine Negation $\neg A$ in KNSAL aus Γ ableitbar sind.

Beispiel:

Demonstration: $\{(A \vee B) \rightarrow B, A, \neg B\}$ ist KNSAL-inkonsistent.

Es gilt eine Ableitung zu konstruieren, in der die Elemente von Γ die primären Annahmen sind und sowohl ein Satz als auch seine Negation im Bereich nur der primären Annahmen (d. h. unmittelbar rechts von der Hauptableitungslinie) abgeleitet sind.

1		$(A \vee B) \rightarrow B$	Annahme
2		A	Annahme
3		$\neg B$	Annahme
4		$\neg B$	3 R
5		A	2 R
6		$A \vee B$	5 \vee E
7		B	1, 5 \rightarrow B

Ex falso sequitur quodlibet:

Wenn eine Menge von Sätzen von AL in KNSAL inkonsistent ist, ist jeder Satz aus der Menge ableitbar.

i		A	
j		$\neg A$	
n		$\neg B$	Annahme
$n+1$		A	i R
$n+2$		$\neg A$	j R
$n+3$		B	$n-n+2$ \neg B

(*Mutatis mutandis* für die Ableitung von $\neg B$.)

Beobachtung: Wenn A und $\neg A$ aus einer Menge von Sätzen abgeleitet werden können, dann kann jeder Satz von AL in nur vier zusätzlichen Schritten abgeleitet werden!

Definition 7.11.2 (Konsistenz in KNSAL):

Eine Menge Γ von Sätzen von AL ist **in KNSAL konsistent** genau dann, wenn sie nicht inkonsistent in KNSAL ist.

7.12 Das System KNSAL+

Eine Erweiterung der Regelmenge von KNSAL kann die Konstruktion von Ableitungen erleichtern und die Ableitungen verkürzen. KNSAL+ ist ein System, das alle Ableitungsregeln von KNSAL enthält „plus“ einige weitere Regeln. Bei den zusätzlichen Regeln handelt es sich um eine Auswahl von **abgeleiteten Ableitungsregeln** und von **Ersetzungsregeln**. Die Auswahl der zusätzlichen Regeln wurde von dem Ziel geleitet möglichst kurze Ableitungen zu ermöglichen und Schachtelungen von Teilaussagen nach Möglichkeit zu vermeiden. (Die Tatsache aber, dass KNSAL eine kleinere Regelmenge als KNSAL+ hat, kann als theoretischer Vorteil angesehen werden.)

Die Tatsache, dass KNSAL+ mehr Regeln enthält bedeutet nicht:

- dass in diesem System die Gültigkeit einer größeren Anzahl von Argumenten von AL gezeigt werden kann
- dass mehr Sätze von AL Theoreme sind.

Es gilt: $\Gamma \vdash_{\text{KNSAL}^+} A \text{ gdw } \Gamma \vdash_{\text{KNSAL}} A$

7.12.1 Abgeleitete Ableitungsregeln von KNSAL+.

Die folgenden Regeln (MT, HS, DS) lassen sich aus Ableitungsformen (bzw. Beweiswegeschemata) von KNSAL ableiten.

1) Modus Tollens.

Modus Tollens (MT)

	$A \rightarrow B$
	$\neg B$
>	$\neg A$

MT erspart uns den Umweg über Ableitungen der folgenden Form (bzw. das Beweiswegeschema):

i	$A \rightarrow B$			
j	$\neg B$			
n	<table style="border-collapse: collapse; margin-left: 20px;"> <tr> <td style="border-bottom: 1px solid black; padding-right: 10px;">A</td> <td style="padding-left: 10px;">Annahme</td> </tr> </table>	A	Annahme	
A	Annahme			
$n+1$	B	$i, n \rightarrow B$		
$n+2$	$\neg B$	j R		
$n+3$	$\neg A$	$n-n+2$ $\neg E$		

MT ist aus diesem Beweiswegeschema abgeleitet.

2) Hypothetischer Syllogismus.

Hypothetischer Syllogismus (HS)

	$A \rightarrow B$
	$B \rightarrow C$
>	$A \rightarrow C$

HS erspart uns den Umweg über Ableitungen der folgenden Form:

i	$A \rightarrow B$	
j	$B \rightarrow C$	
n	<u> A </u>	Annahme
$n+1$	<u> B </u>	$i, n \rightarrow B$
$n+2$	<u> C </u>	$j, n+1 \rightarrow B$
$n+3$	$A \rightarrow C$	$n-n+2 \rightarrow E$

HS ist aus diesem Beweiswegschemata abgeleitet.

3) Disjunktiver Syllogismus.

Disjunktiver Syllogismus (DS)

	$A \vee B$	oder		$A \vee B$
	$\neg A$			$\neg B$
>	B		>	A

DS erspart uns den Umweg über Ableitungen der folgenden Form:

i	$A \vee B$	
j	$\neg A$	
n	<u> A </u>	Annahme
$n+1$	<u> $\neg B$ </u>	Annahme
$n+2$	<u> $\neg A$ </u>	j R
$n+3$	<u> A </u>	n R
$n+4$	B	$n+1-n+3 \rightarrow B$
$n+5$	<u> B </u>	Annahme
$n+6$	B	$n+5$ R
$n+7$	B	$i, n-n+4, n+5-n+6 \vee B$

DS ist aus diesem Beweiswegschemata abgeleitet.

Aus Ableitungsformen dieser Art, die – wie deutlich zu sehen – in der Metasprache formuliert sind, lassen sich durch **uniforme Substitution** objektsprachlicher Ausdrücke für die metasprachlichen Ausdrücke (d. h. durch eine einheitliche Ersetzung der metasprachlichen Ausdrücke an allen Stellen ihres Vorkommens durch objektsprachliche Ausdrücke) Ableitungen in der Objektsprache gewinnen.

Beispiel: Substitution von ‚A‘ für A , ‚ $(B \leftrightarrow \neg C)$ ‘ für B und ‚ $D \vee E$ ‘ für C in HS.

HS

	$A \rightarrow B$
	$B \rightarrow C$
>	$A \rightarrow C$

Substitutionsinstanz von HS

7.	$A \rightarrow (B \leftrightarrow \neg C)$	
13.	$(B \leftrightarrow \neg C) \rightarrow (D \vee E)$	
27.	$A \rightarrow (D \vee E)$	7, 13 HS

Die drei Regeln, die wir hier eingeführt haben sind für den Zweck der Abkürzung von Ableitungen ausreichend. Es besteht aber prinzipiell die Möglichkeit, für jeden Beweis einer Ableitbarkeitsbehauptung eine abgeleitete Ableitungsregel zu konstruieren.

(Die **Äquivalenzen** aus der Liste in 7.12.2 (siehe unten) lassen sich via Konstruktion eines Beweiswegschemas als abgeleitete Ableitungsregeln konstruieren. (So z.B. DN, wie die Beispiele aus Abschnitt 7.10 zeigen.) In einer Ableitung kann dann der Satz auf der linken Seite von ‚ $\dashv\vdash$ ‘ (metasprachliches Zeichen für logische Äquivalenz) in einer Zeile stehen, die sich oberhalb des Satzes befindet, der rechts von ‚ $\dashv\vdash$ ‘ steht oder *vice versa*.)

Die abgeleiteten Ableitungsregeln von KNSAL+, d.h. MT, HS und DS, müssen auf den ganzen Satz (bzw. auf mehrere ganze Sätze) in einer (bzw. in mehreren) Zeile(n) angewendet werden!⁶ Dabei bestimmen die Hauptkonnektive der Sätze darüber, ob die betreffende abgeleitete Ableitungsregel angewendet werden darf oder nicht.

7.12.2 Ersetzungsregeln

Ersetzungsregeln erlauben uns, Sätze mit Hilfe der Ersetzung einzelner Satzkomponenten aus anderen Sätzen abzuleiten. (Zur Erinnerung: ein Satz von AL ist seine eigene Satzkomponente!) Somit können diese Regeln im Gegensatz zu MT, HS und DS (sowie zu

⁶ Das würde auch für die Äquivalenzen gelten, wenn sie als abgeleitete Ableitungsregeln von KNSAL+ zugelassen würden.

abgeleiteten Äquivalenzregeln), auch auf untergeordnete Satzkomponenten eines Satzes angewendet werden. Den Ersetzungsregeln liegt das Äquivalenzersetzungsgesetz zugrunde:

Äquivalenzersetzungsgesetz:

„Jede Satzkomponente von Sätzen aus Zeilen einer Ableitung kann in einer folgenden Zeile durch einen ihr logisch-äquivalenten Ausdruck ersetzt werden.“
(Seebohm 1991, S. 59)

Die nachfolgende Liste liefert einen Überblick über die logischen Äquivalenzen, die mit Hilfe des Äquivalenzersetzungsgesetzes in KNSAL+ eingesetzt werden dürfen. Wir nennen logische Äquivalenzen dieses Typs Ersetzungsregeln von KNSAL+.

DIE ERSETZUNGSREGELN VON KNSAL+

Kommutation (Kom)

$$A \wedge B \dashv\vdash B \wedge A$$

$$A \vee B \dashv\vdash B \vee A$$

Assoziation (Ass)

$$A \wedge (B \wedge C) \dashv\vdash (A \wedge B) \wedge C$$

$$A \vee (B \vee C) \dashv\vdash (A \vee B) \vee C$$

Implikation (Impl)

$$A \rightarrow B \dashv\vdash \neg A \vee B$$

Doppelte Negation (DN)

$$A \dashv\vdash \neg\neg A$$

DeMorgan (DeM)

$$\neg(A \wedge B) \dashv\vdash \neg A \vee \neg B$$

$$\neg(A \vee B) \dashv\vdash \neg A \wedge \neg B$$

Idempotenz (Idem)

$$A \dashv\vdash A \wedge A$$

$$A \dashv\vdash A \vee A$$

Transposition (Transp)

$$A \rightarrow B \dashv\vdash \neg B \rightarrow \neg A$$

Exportation (Exp)

$$A \rightarrow (B \rightarrow C) \dashv\vdash (A \wedge B) \rightarrow C$$

Distribution (Dist)

$$A \wedge (B \vee C) \dashv\vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

$$A \vee (B \wedge C) \dashv\vdash (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

Äquivalenz (Äquiv)

$$A \leftrightarrow B \dashv\vdash (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

$$A \leftrightarrow B \dashv\vdash (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$$

Ersetzungsregeln erlauben die Ersetzung von Satzkomponenten **an jeder Stelle** einer Ableitung.

Ersetzungsregeln sind **beidseitig**. Eine Satzkomponente, die die Form des Satzes links von ‚ \vdash ‘ hat, kann durch eine Satzkomponente ersetzt werden, die sich rechts von ‚ \vdash ‘ befindet und umgekehrt.

Beispiel: Anwendung von Impl

Die Ersetzungsregel (Impl) kann, wie die übrigen Ersetzungsregeln sowohl auf einen ganzen Satz (a) als auch auf eine seiner untergeordneten Komponenten (b) angewendet werden.

a) Angewendet auf einen ganzen Satz:

Satz:	1.		$(A \wedge B) \rightarrow (C \rightarrow D)$	
	2.		$\neg(A \wedge B) \vee (C \rightarrow D)$	1 Impl

b) Angewendet auf einen Teilsatz.

Satz:	1.		$(A \wedge B) \rightarrow (C \rightarrow D)$	
	2.		$(A \wedge B) \rightarrow (\neg C \vee D)$	1 Impl

Natürlich können wir durch eine zweifache Anwendung dieser Regel den Satz in Zeile 3 ableiten

Satz:	1.		$(A \wedge B) \rightarrow (C \rightarrow D)$	
	2.		$\neg(A \wedge B) \vee (C \rightarrow D)$	1 Impl
	3.		$\neg(A \wedge B) \vee (\neg C \vee D)$	2 Impl

7.12.3 Ableitungen in KNSAL+ : Beispiele

Jede Ableitungsregel darf nur auf Sätze angewendet werden, die die geeignete Form haben, oder im Falle von Ersetzungsregeln, auf Sätze, die Satzkomponenten mit der geeigneten Form haben.

Die Strategie, der Rekonstruktion der Annahmen aus dem Ableitungsziel (siehe Abschnitt 7.4) kann in KNSAL+ (sofern von den hinzugenommenen Ableitungsregeln dieses Systems Gebrauch gemacht wird) eigentlich aufgegeben werden. (Warum?)

Beispiel 1: Korrekte Ableitung in KNSAL+

Abzuleiten ist: $\neg[B \rightarrow (E \vee D)] \rightarrow A$

1		$(A \vee \neg B) \vee \neg C$	Annahme	
2		$(D \vee E) \vee C$	Annahme	
3		$(\neg\neg A \vee \neg B) \vee \neg C$	1 DN	
4		$\neg(\neg A \wedge B) \vee \neg C$	3 DeM	
5		$(\neg A \wedge B) \rightarrow \neg C$	4 Impl	
6		$C \vee (D \vee E)$	2 Kom	
7		$C \vee (E \vee D)$	6 Kom	
8		$\neg\neg C \vee (E \vee D)$	7 DN	
9		$\neg C \rightarrow (E \vee D)$	8 Impl	
10		$(\neg A \wedge B) \rightarrow (E \vee D)$	5, 9 HS	
11		$\neg A \rightarrow [B \rightarrow (E \vee D)]$	10 Exp	
12		$\neg[B \rightarrow (E \vee D)] \rightarrow \neg\neg A$	11 Transp	
13		$\neg[B \rightarrow (E \vee D)] \rightarrow A$	12 DN	

Beispiel 2: Inkorrekte Ableitung in KNSAL+

Abzuleiten ist: $\neg[B \rightarrow (E \vee D)] \rightarrow A$

1		$(A \vee \neg B) \vee \neg C$	Annahme	
2		$(D \vee E) \vee C$	Annahme	
3		$\neg(\neg A \wedge B) \vee \neg C$	1 DeM	FEHLER!
4		$(\neg A \wedge B) \rightarrow \neg C$	3 Impl	
5		$C \vee (E \vee D)$	2 Kom	FEHLER!
6		$\neg C \rightarrow (E \vee D)$	5 Impl	FEHLER!
7		$(\neg A \wedge B) \rightarrow (E \vee D)$	4, 6 HS	
8		$\neg A \rightarrow [B \rightarrow (E \vee D)]$	7 Exp	
9		$\neg[B \rightarrow (E \vee D)] \rightarrow \neg\neg A$	8 Transp	
10		$\neg[B \rightarrow (E \vee D)] \rightarrow A$	9 DN	

7.12.4 Definitionen in KNSAL+

Die Definitionen der Grundbegriffe von KNSAL+ lauten genau so wie die Definitionen für die Grundbegriffe von KNSAL, bis auf die Tatsache, dass 'KNSAL' darin durch 'KNSAL+' ersetzt ist.

7.12.5 Entscheidungsverfahren KNSAL+

Die Tests auf die verschiedenen syntaktischen Eigenschaften und Relationen sind analog durchzuführen. Zum Beispiel: Um zu zeigen, dass ein Satz A von AL ein Theorem von KNSAL+ ist, ist eine Ableitung in KNSAL+ zu konstruieren, die zeigt, dass A aus der leeren Menge ableitbar ist.

7.13 Exkurs: Darstellungsformate von Ableitungen in Kalkülen des Natürlichen Schließens

Illustration an sehr einfachen Beispielen.

Beispiel 3 (ohne Teilableitung):

$$\{A \wedge B, C \wedge D, (A \wedge D) \rightarrow E\} \vdash_{\text{KNSAL}} E?$$

1. Fitch-Format (nach F. B. Fitch: *Symbolic Logic: An Introduction*, Ronald 1952):

1	A \wedge B	Annahme
2	C \wedge D	Annahme
3	(A \wedge D) \rightarrow E	Annahme
4	A	1 \wedge B
5	D	2 \wedge B
6	A \wedge D	4, 5 \wedge E
7	E	3, 6 \rightarrow B

2. Gentzen-Format:

$$\begin{array}{c}
 \frac{A \wedge B}{\wedge B} \quad \frac{C \wedge D}{\wedge B} \\
 \frac{A \quad D}{\wedge E} \\
 \frac{A \wedge D \quad (A \wedge D) \rightarrow E}{\rightarrow B} \\
 E
 \end{array}$$

3. Lemmon-Format (nach E. J. Lemmon, *Beginning Logic*, Hackett 1978.)

1	(1)	A \wedge B	Annahme
2	(2)	C \wedge D	Annahme
3	(3)	(A \wedge D) \rightarrow E	Annahme
1	(4)	A	1 \wedge B
2	(5)	D	2 \wedge B
1,2	(6)	A \wedge D	4,5 \wedge E
1,2,3	(7)	E	3,6 \rightarrow B

Die Ziffern, die sich links von den eingeklammerten Zeilennummern befinden, beziehen sich auf die Annahmen, die bei der Ableitung des Ableitungsziels benutzt worden sind (Annahmenummern). Im Falle eines Arguments macht dieses Darstellungsformat deutlich, dass die Ableitung der Konklusion—wie gefordert—aus den Prämissen und nicht aus anderen Annahmen abgeleitet worden ist.

Beispiel 4 (mit Teilleitung):

$$F \rightarrow (G \wedge H) \vdash_{\text{KNSAL}} F \rightarrow G?$$

1. Fitch-Format:

1	F → (G ∧ H)	Annahme
2	F	Annahme
3	G ∧ H	1, 2 →B
4	G	3 ∧B
5	F → G	2-4 →E

2. Gentzen-Format:

$$\begin{array}{c}
 \frac{F \rightarrow (G \wedge H) \quad \frac{\frac{\frac{}{F}}{F} \text{=}^1}{G \wedge H} \wedge B}{G} \rightarrow E 1}{F \rightarrow G} \rightarrow B
 \end{array}$$

Ein fettgedruckter Strich über einem Satz von AL markiert diesen als Hilfsannahme. Diese Striche werden nummeriert. Die Nummer der Hilfsannahme wird dann neben die Anwendung der Regel gesetzt, die die Hilfsannahme mit dieser Nummer löscht.

3. Lemmon-Format: Hilfsannahmen erhalten ihre eigenen Zeilen- und Annahmenummern.

7.14 Kurze Bemerkungen zur Korrektheit und Vollständigkeit von KNSAL

Im letzten Kapitel dieses Skripts wird die Korrektheit und die Vollständigkeit von KNSAL für die Aussagenlogik bewiesen werden. An dieser Stelle soll nur auf die folgende Äquivalenz hingewiesen werden:

$$\text{Satz 7.14} \quad \Gamma \vdash_{\text{KNSAL}} A \quad \text{gdw} \quad \Gamma \models A$$

Die syntaktischen Begriffe des Systems KNSAL entsprechen den semantischen Begriffen aus Kapitel 5. Sätze, die (wie Satz 7.14) Aussagen über die Semantik und/oder die Syntax von AL machen, werden Metatheoreme genannt.

Bei Satz 7.14 handelt es sich um das **Adäquatheits-Metatheorem für KNSAL**. Es macht die folgenden zwei Aussagen:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Satz 7.14.a} & \text{Wenn } \Gamma \vdash_{\text{KNSAL}} A, \text{ dann } \Gamma \models A \\
 \text{Satz 7.14.b} & \text{Wenn } \Gamma \models A, \text{ dann } \Gamma \vdash_{\text{KNSAL}} A
 \end{array}$$

Bei Satz 7.14.a handelt es sich um das **Korrektheits-Metatheorem für KNSAL**. Bei Satz 7.14.b handelt es sich um das **Vollständigkeits-Metatheorem für KNSAL**.

Wenn ein System **nicht korrekt** ist, dann kann in diesem System ein Satz A aus einer Satzmenge Γ abgeleitet werden, ohne wahrheitsfunktional aus dieser Satzmenge zu folgen. Ein inkorrektes System wird also z.B. die Gültigkeit eines Arguments behaupten können, ohne dass dieses Argument wahrheitsfunktional gültig ist. Umgekehrt: Ein System, das **nicht vollständig** ist wird es nicht erlauben aus der Satzmenge Γ , alle Sätze abzuleiten, die aus ihr wahrheitsfunktional folgen. Ein unvollständiges System wird also z.B. nicht in der Lage sein zu zeigen, dass ein Argument darin gültig ist, wenn es wahrheitsfunktional gültig ist.

Ein System, das mindestens eine dieser beiden Eigenschaften (Korrektheit und Vollständigkeit) vermissen lässt, ist **inadäquat**.

Die Tatsache selbst also, dass beim Entwurf der Ableitungsregeln darauf geachtet wird (siehe Abschnitt 7.1.2), dass die Regeln wahrheitserhaltend sind, garantiert nicht die Adäquatheit des Systems.