

**Aufgabe 26** (2 + 2 + 2 + 2 Punkte)

Welche der folgenden Mengen sind konsistent? Geben Sie jeweils eine Begründung an.

1.  $\{p_0 \rightarrow p_1, p_0 \wedge p_2 \rightarrow p_1 \wedge p_3, p_0 \wedge p_2 \wedge p_4 \rightarrow p_1 \wedge p_3 \wedge p_5, \dots\}$
2.  $\{\neg p_1 \wedge p_2 \rightarrow p_0, p_1 \rightarrow (\neg p_1 \rightarrow p_2), p_0 \leftrightarrow \neg p_2\}$
3.  $\{p_0 \rightarrow p_1, p_1 \rightarrow p_2, p_2 \rightarrow p_3, p_3 \rightarrow \neg p_0\}$
4.  $\Gamma_n := \{p_0\} \cup \{p_k \rightarrow p_{k+1} \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{\neg p_n\}$  (für  $n \in \mathbb{N}$ )

Begründen Sie Ihre Antwort unter 4. mit einer vollständigen Induktion über die natürliche Zahl  $n$ .

**Aufgabe 27** (3 Punkte)

Beweisen Sie Lemma 7.4 aus der Vorlesung.

Sei  $\Gamma \subseteq \text{PROP}$  eine Menge von Aussagen. Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent:

- (1)  $\Gamma$  ist konsistent.
- (2) Es gibt keine Formel  $\phi \in \text{PROP}$ , so dass:  $\Gamma \vdash \phi$  und  $\Gamma \vdash \neg\phi$ .
- (3) Es gibt  $\phi \in \text{PROP}$  mit  $\Gamma \not\vdash \phi$ .

**Aufgabe 28** (4 Punkte)

Eine Formel  $\phi$  heiße *unabhängig* von der Menge  $\Gamma$ , falls  $\Gamma \not\vdash \phi$  und  $\Gamma \not\vdash \neg\phi$ . Zeigen Sie, dass  $p_1 \rightarrow p_2$  unabhängig von  $\{p_1 \leftrightarrow p_0 \wedge \neg p_2, p_2 \rightarrow p_0\}$  ist.

**Aufgabe 29** (4 Punkte + 2 Zusatzpunkte)

Eine Menge  $\Gamma$  heiße *vollständig*, falls fur jede Formel  $\phi$  entweder  $\Gamma \vdash \phi$  oder  $\Gamma \vdash \neg\phi$ .

1. Zeigen Sie durch Induktion uber dem Aufbau von Formeln, dass  $\{p_0, p_1, p_2, \dots, p_n, \dots\}$  vollständig ist. (Es wird angenommen, dass Formeln mit Hilfe von  $\wedge$ ,  $\rightarrow$  und  $\perp$  aufgebaut sind.)
2. Zeigen Sie, dass die Menge  $\{\sigma \mid \Gamma \vdash \sigma\}$  maximal konsistent ist genau dann, wenn  $\Gamma$  vollständig ist.

Abgabe der Aufgaben am Do. 09.12.2010 nach der Vorlesung oder als PDF im Internet.